Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669

STUDIJNÍ OPORA DISTANČNÍHO VZDĚLÁVÁNÍ

ŘEŠENÍ PLANIMETRICKÝCH KONSTRUKČNÍCH ÚLOH

EVA DAVIDOVÁ

Ostrava 2005

Zpracovala: RNDr. Eva Davidová
Recenzenti: Doc. RNDr. Pavel Květoň, CSc.
Mgr. Libor Koníček

Publikace byla vytvoţena v r§mci projektu St§tn² informańn² politiky ve vzdœl§v§n²
v roce 2005.
ISBN 80-903647-1-3

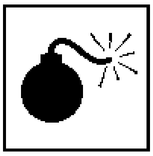
Obsah opory

Úvod:

S planimetrií se setkal každý z vás na základní škole jako se součástí výuky matematiky pod názvem „geometrie v rovině“, resp. „rovinná geometrie“. Nejčastěji jste pracovali s pojmy bod, přímka, úsečka, polopřímka. Z rovinných obrazců jste největší pozornost věnovali trojúhelníkům, čtyřúhelníkům a kružnicím. Těmito útvary jste se zabývali jednak početně – určovali jste jejich obvody a obsahy, velikosti vnitřních úhlů apod., ale také jste tyto útvary sestrojovali, byly-li předem dány některé jejich prvky, resp. byly-li popsány vlastnosti, které hledané obrazce mají mít.

No a právě problematiku týkající se konstrukcí trojúhelníků, čtyřúhelníků a kružnic naleznete i v tomto studijním textu. Konstrukce, které jsou zde použity, jsou tzv. eukleidovské konstrukce – tj. takové, k nimž postačí pouze pravítko a kružítko. Nejsou zde obsaženy například konstrukce prováděné na základě výpočtu či konstrukce na základě užití shodných či podobných zobrazení.

Základem pro většinu konstrukcí, které se tady společně naučíme, jsou „**množiny bodů roviny splňujících dané vlastnosti**“ tvořící obsah první kapitoly**.** Zjistíte, že některé z nich znáte z předchozí výuky planimetrie na ZŠ, další se naučíte objevovat a sestrojovat. Pro pochopení souvislostí je důležité, abyste si u každé jednotlivé úlohy uvědomili, že mnohé známé geometrické pojmy se dají popsat pomocí svých geometrických vlastností, které ve svém důsledku vedou k vyřešení mnoha konstrukčních planimetrických úloh. Konstrukce založené na množinách bodů daných vlastností budou pak tvořit stavební kamínky, z nichž budeme sestavovat konstrukce trojúhelníků, čtyřúhelníků a kružnic.

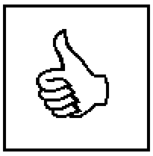


V úvodu druhé, třetí a čtvrté kapitoly se seznámíte se základními pojmy vztahujícími se k trojúhelníku, čtyřúhelníku a kružnici. Zapomněli-li jste některý z nich, podívejte se do **„Geometrického slovníčku“,** který je součástí jak kapitoly **2** týkající se trojúhelníka, tak kapitoly **3** týkající se čtyřúhelníka. Základní pojmy je třeba dobře ovládat. Budete-li na pochybách, raději si pojem vždy vyhledejte, protože jeho geometrické vlastnosti přímo určují postup konstrukce.

Kapitoly **2**, **3** a **4** obsahují kromě řešených příkladů i **úlohy sloužící k samostatnému procvičení látky**. Jejich řešení jsou shrnuta v kapitolách Řešení úloh, navíc u každé úlohy je odkaz na příslušnou stránku. **Hypertextový odkaz** v rámečku vás rychle dovede k řešení příslušné úlohy a zase zpět k jejímu zadání. Rady na závěr u každé kapitoly obsahují též odkazy na vhodnou doplňující literaturu.

Tato opora si klade za cíl vybudovat u vás dovednosti a návyky, které jsou při řešení konstruktivních úloh nezbytné. Prvořadé je pečlivé čtení zadání. Je třeba dobře rozumět pojmům ze zadání, aby bylo možné z nich sestavit kvalitní náčrtek a rozbor. **Zásady pro provádění náčrtku** zde zmiňuji vícekrát, protože pro řešení úlohy jsou podstatné:

Úlohu si načrtněte, jako by již byla vyřešena. Ty prvky a vztahy, které jsou zadány, si vždy zvýrazněte barevně. Pak se zaměřte na body, které je třeba sestrojit (zbývající vrchol trojúhelníka, apod.) a uvědomte si, že hledáte-li bod, hledáte jej jako průsečík dvou čar. A tyto čáry jsou většinou obrazy množin bodů splňujících podmínky ze zadání úlohy.



Po prostudování opory budete znát:

- Co to jsou množiny bodů daných vlastností a jak je lze využít v konstruktivních úlohách;
- Jaký je rozdíl mezi polohovou a nepolohovou úlohou a jaký dopad to má na postup konstrukce
- Jak lze konstruktivně využít zadání různých prvků v trojúhelníku;
- Jaké důsledky pro postup konstrukce mají vlastnosti jednotlivých druhů čtyřúhelníků
- Jak vlastnosti mají bodové množiny tvořené středy kružnic s ohledem na další požadované vlastnosti

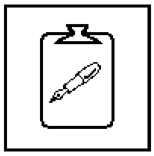
Po prostudování opory budete schopni:

- Konstruktivní úlohu běžné středoškolské úrovně načrtnout a rozebrat, stanovit postup konstrukce, zapsat jej v po sobě následujících krocích
- Sestrojit základní bodové množiny jako součást složitějších konstrukcí
- Provést konstrukce trojúhelníků, čtyřúhelníků a kružnic opírající se o užití bodových množin daných vlastností
- Provést zkoušku správnosti řešení konstruktivní úlohy
- S větším porozuměním studovat i navazující a související témata středoškolské planimetrie – tj. konstrukce na základě výpočtu, užití shodných zobrazení a početní úlohy o rovinných obrazcích

1 Množiny bodů roviny splňujících dané vlastnosti

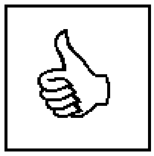
<u>V této kapitole se dozvíte</u>: *jaké geometrické vlastnosti mají rovinné geometrické útvary*

<u>V této kapitole se naučíte</u>: *jak sestrojit rovinný útvar splňující jisté předem dané požadavky*



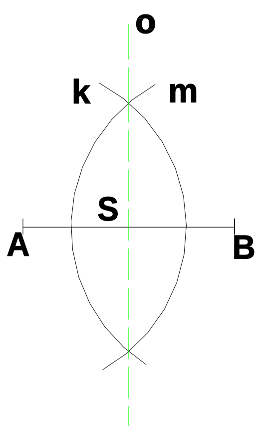
<u>Klíčová slova kapitoly</u>: ***osa úsečky; osa pásu; ekvidistanta přímky; osy úhlů různoběžek; kružnice; Thaletova kružnice; osa mezikruží; úhly v kružnici – obvodový a středový úhel; množina bodů roviny, z nichž vidíme úsečku pod úhlem dané velikosti;***

<u>Čas potřebný pro prostudování kapitoly</u>: *1 hod. teorie + 2 hod. nastudování a provedení konstrukcí*



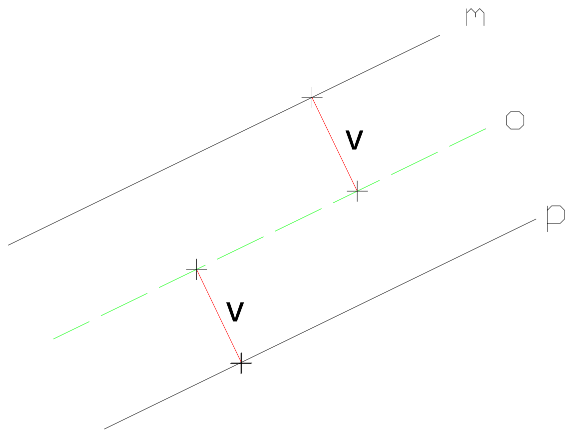
V této kapitole se soustřeďte na pochopení vztahů mezi daným objektem a jeho geometrickými vlastnostmi. Připravte si nelinkovaný papír a rýsovací pomůcky – tužku, kružítko, trojúhelník s ryskou, barevné pastelky nebo tenké fixy. Bude-li úloha složitější, hned si ji podle předlohy sami načrtněte nebo vyrýsujte.

1.1 Osa úsečky

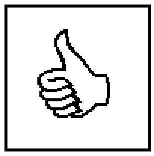


Při užití osy úsečky v konstrukčních úlohách je nejdůležitější si uvědomit, že přímka ***o*** je množinou bodů, které mají od krajních bodů úsečky, tj. bodů A a B **stejnou vzdálenost.** V důsledku toho je osa úsečky kolmicí procházející jejím středem S.

1.2 Osa pásu rovnoběžek

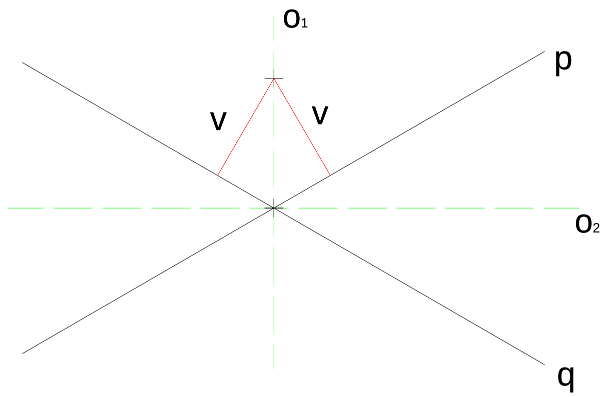


Platí, že osa **o** je množinou bodů, které mají od daných rovnoběžek **m** a **p** stejnou vzdálenost. Přímka **o** se nazývá osou pásu rovnoběžek **m** a **p***.*
A naopak - dvojice přímek (**m,p**) se nazývá **ekvidistanta přímky o.**



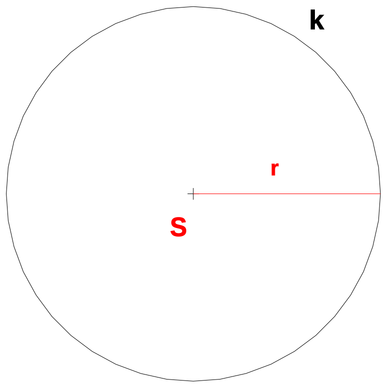
Poznámka: Ekvidistantní znamená „stejně vzdálený“ – ekvidistanta je tedy množina bodů majících od přímky **o** stejnou vzdálenost

1.3 Osy úhlů dvojice různoběžek



Na obrázku jsou různoběžky **p** a **q**. Každé dvě různoběžky svírají dva úhly, jejichž velikosti se doplňují do 180°. Osy těchto úhlů jsou označeny $\mathbf{o_1}$, $\mathbf{o_2}$**.**
Osy úhlů dvojice různoběžek jsou vzájemně **kolmé**. Co je důležité pro použití v konstrukčních úlohách, je vlastnost bodů ležících na těchto osách. Jeden takový je vyznačen - povšimněte si, že má od obou daných přímek **p,q** tutéž vzdálenost.
Osy úhlů různoběžek lze tedy charakterizovat jako **množinu bodů, které mají od přímek p,q stejnou vzdálenost.**

1.4 Kružnice

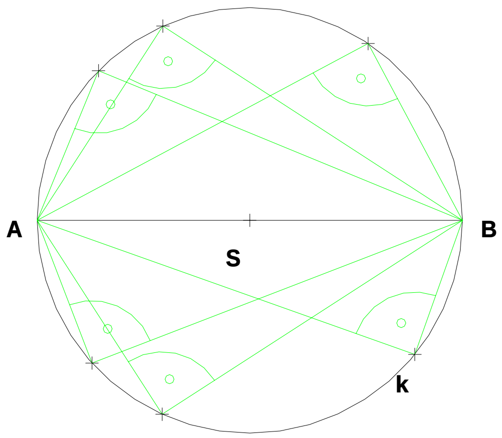


Množina bodů tvořících kružnici má tu vlastnost, že její body mají od daného pevného bodu (středu **S**) konstantní vzdálenost (poloměr **r**).

Lze zapsat: $k(S;r)=\{X;\ |SX|=r\}$

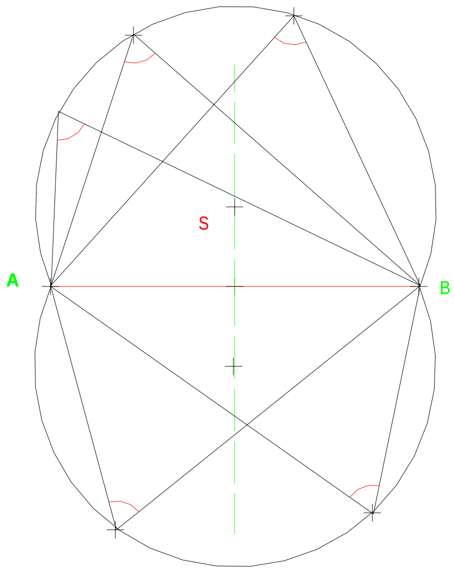
1.5 Thaletova kružnice

Tento pojem určitě znáte. Upřesníme proto jen pohled na Thaletovu kružnici z hlediska společných vlastností bodů, které ji tvoří: Thaletova kružnice s průměrem AB je ***množina vrcholů pravých úhlů nad úsečkou AB***. Někdy také říkáme, že je to množina takových bodů, z nichž ***„vidíme úsečku AB pod pravým úhlem***“



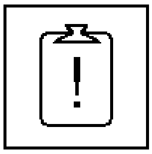
Poznamenejme ještě, že je to vlastně kružnice ***k*** bez dvou bodů (A,B), protože body **A, B** nesplňují požadovanou vlastnost.
Množinu bodů, které vytvářejí Thaletovu kružnici τ nad průměrem **AB** lze zapsat takto: $\tau=\{X;|\angle AXB|=90°\}$. Zapamatujte si i čtení takovéhoto zápisu: „τ je množinou bodů (roviny), pro které platí, že velikost úhlu **AXB** je 90°.“

1.6 Obvodové úhly

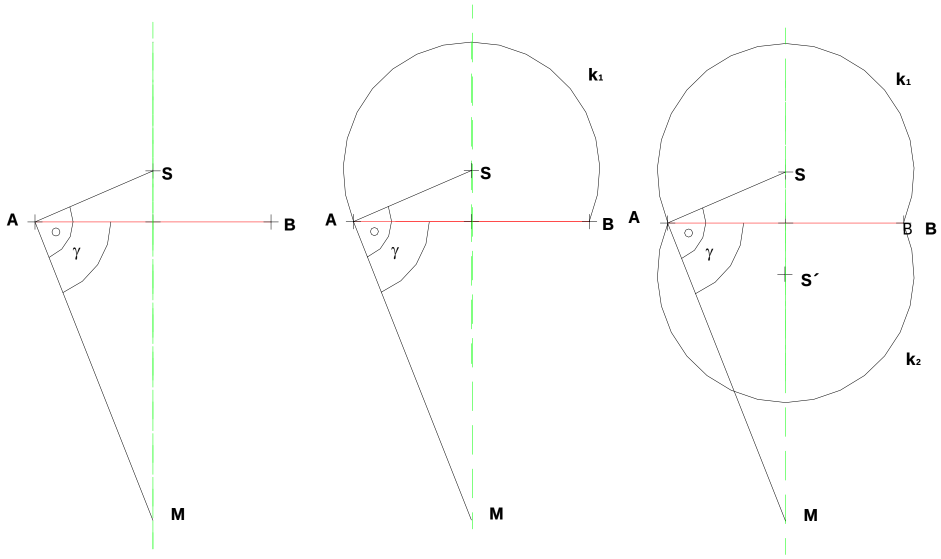


V této kapitole poznáte množinu bodů roviny, ze kterých je úsečka **AB** vidět pod úhlem dané velikosti γ: Všimněte si, že **vrcholy** úhlu zvoleného tak, aby měl danou velikost γ a aby jeho ramena procházela body **A, B, vytvářejí dvojici kruhových oblouků**, jejichž středy leží na ose úsečky **AB**. Takovéto úhly se nazývají **obvodové**, neboť jejich vrcholy leží na obvodu oblouku. Pro jejich velikost platí, že je rovna polovině příslušného ***středového*** úhlu **ASB**. (teorii můžete nastudovat např. v [1], kapitola 1.10)

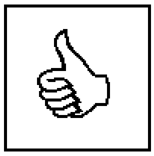
Množinu M vrcholů úhlů, z nichž je úsečka AB vidět pod úhlem o velikosti γ lze zapsat takto: $\mathrm{M}=\{X;|\angle AXB|=\gamma\}$. Zapamatujte si i čtení takovéhoto zápisu: „M je množinou bodů (roviny), pro které platí, že velikost úhlu **AXB** je γ."
Nyní se naučíte takovouto množinu sestrojit. Tuto konstrukci budeme pro další aplikace považovat za základní, v zápisech konstrukcí trojúhelníků a čtyřúhelníků budete psát pouze, **že** se tato množina sestrojí, ale ne **jak** se sestrojí. Pokud si budete potřebovat tuto konstrukci připomenout, vraťte se na toto místo.



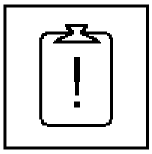
Konstrukce množiny bodů, z nichž vidíme úsečku AB pod ostrým úhlem γ:



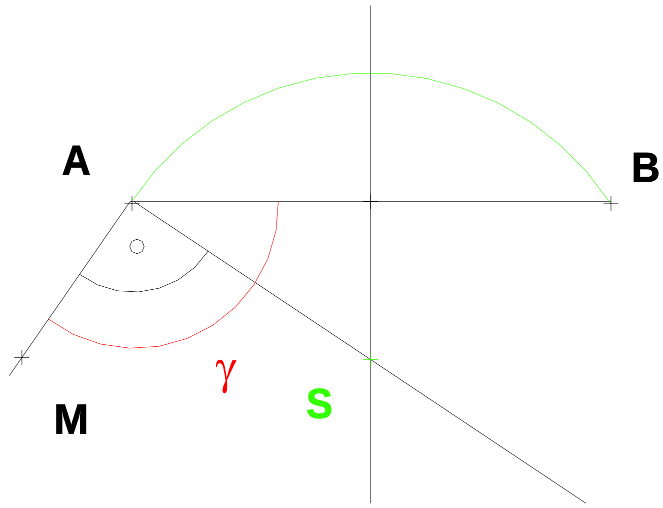
Postup konstrukce je rozkreslen do jednotlivých fází. Nejprve sestrojte osu úsečky **AB** a pak od úsečky **AB** do jedné poloroviny vyneste tzv. **úsekový úhel** s vrcholem v bodě **A,** jehož velikost je rovna velikosti obvodových úhlů – tedy γ. Vznikne polopřímka **AM**. K ní veďte kolmici bodem **A.** Ta vymezí na ose úsečky střed hledaného oblouku – bod **S,** poloměr oblouku je $|$**SA**$|$, resp. $|$**SB**$|$. Máme tedy sestrojenou jednu část hledané množiny – oblouk $\mathbf{k_1}$. Druhý oblouk včetně jeho středu sestrojíte osově souměrně podle přímky **AB.** Hledanou množinu tvoří sjednocení dvou oblouků $\mathbf{k_1} \cup \mathbf{k_2}$ přičemž do ní nepatří body **A** a **B**.



Poznámka: Konstrukci si prakticky vyzkoušejte – například pro úhly 30°, 45°, 60°. Měli byste ji ovládat zpaměti, obdobně jako například některý důležitý algebraický vzorec.



Konstrukce množiny bodů,
z nichž vidíme úsečku AB pod tupým úhlem γ:

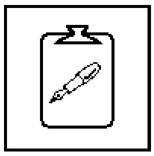


Postup je v podstatě stejný jako u ostrého úhlu. Od **AB** nanesete úsekový úhel velikosti γ, k jeho ramenu **AM** sestrojíte kolmici bodem **A**, ta protne osu úsečky v bodě **S**. Oblouk, který je v tomto případě menší než půlkružnice, má střed **S** a poloměr |**SA**|, resp. |**SB**|. Druhý oblouk bude s ním osově souměrný podle **AB**.

2 Konstrukce trojúhelníků

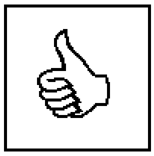
<u>V této kapitole se dozvíte</u>: *jaký je rozdíl mezi polohovými a nepolohovými úlohami; jaké jsou fáze řešení konstrukční úlohy, jak se při sestrojování trojúhelníka využívají jeho zadávající prvky – zejména těžnice, výška, poloměr kružnice opsané a poloměr kružnice vepsané trojúhelníku.*

<u>V této kapitole se naučíte</u>: *prakticky provést rozbor úlohy; postupovat efektivně při „objevování“ řešení, zapsat postup řešení a zjistit jejich počet; provést konstrukci a zkoušku*



<u>Klíčová slova kapitoly</u>: ***těžnice; těžiště; výška; kružnice opsaná trojúhelníku; kružnice vepsaná trojúhelníku; polohová úloha; nepolohová úloha; volné zadání; vázané zadání;***

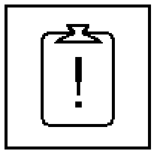
<u>Čas potřebný pro prostudování kapitoly</u>: *4 hodiny teorie + 10 hodin řešení úloh a provedení konstrukcí*

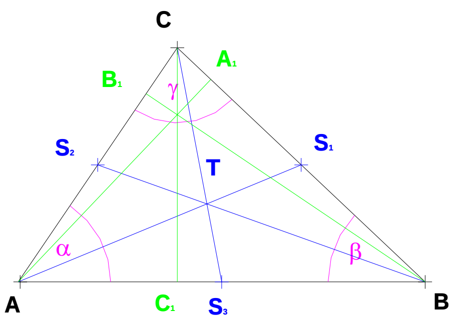


V této kapitole se soustřeďte na především na nejdůležitější fázi řešení konstrukční úlohy – a tou je **rozbor!** Při řešení následujících úloh doporučuji, abyste si připravili nelinkovaný papír, tužku a barevné pastelky nebo tenké barevné fixy. Váš vlastní náčrtek by měl být přehledný a **dostatečně velký**, abyste si do něj mohli zakreslovat vztahy v trojúhelníku, které vás povedou k rozřešení úlohy. Na vyznačení zadávajících prvků si zvolte **jednu barvu**, kterou budete k tomuto účelu používat **ve všech úlohách**. V tomto textu to bude vždy barva **červená.** Další množiny bodů, které použijete k řešení, si vyznačujte jinými barvami

2.1 ***Trojúhelník*** *– základní pojmy*

V celé následující kapitole budeme užívat standardní označení prvků v trojúhelníku podle následujícího obrázku a komentáře:



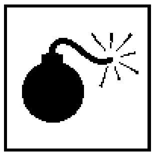


Strany trojúhelníka a jejich velikosti:
$a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$

Těžnice trojúhelníka a jejich velikosti:
$t_a = |AS_1|$, $t_b = |AS_2|$, $t_c = |AS_3|$

Výšky trojúhelníka a jejich velikosti:
$v_a = |AA_1|$, $v_b = |BB_1|$, $v_c = |CC_1|$

GEOMETRICKÝ SLOVNÍČEK – Trojúhelník



Připomeňme si ještě vymezení některých základních pojmů, týkajících se trojúhelníka:

Těžnice	je úsečka spojující vrchol trojúhelníka se středem protilehlé strany
Těžiště	je průsečíkem těžnic; má tu vlastnost, že dělí těžnici na dva díly, jejichž velikosti jsou v poměru 2:1, přičemž větší díl je blíže k vrcholu
Výška	je úsečka ležící na kolmici vedené z vrcholu na protilehlou stranu, přičemž jedním jejím krajním bodem je vrchol trojúhelníka, druhým je pata této kolmice
Průsečík výšek	je bod, v němž se protínají přímky, na kterých leží výšky; u ostroúhlých trojúhelníků leží uvnitř, u tupoúhlých vně trojúhelníka; u pravoúhlého trojúhelníka je to vrchol pravého úhlu
Střední příčka	je úsečka spojující středy dvou stran; je rovnoběžná se zbývající stranou a má velikost rovnou polovině velikosti této strany

Kružnice opsaná trojúhelníku	je kružnice procházející všemi jeho vrcholy
Střed kružnice opsané	je bod mající stejnou vzdálenost od všech vrcholů trojúhelníka, je proto průsečíkem os stran trojúhelníka; u ostroúhlého trojúhelníka leží uvnitř, u tupoúhlého vně a u pravoúhlého leží v polovině přepony
Kružnice vepsaná trojúhelníku	je kružnice ležící uvnitř trojúhelníka a dotýkající se všech jeho stran
Střed kružnice vepsané	je to bod, který leží uvnitř trojúhelníka a má stejnou vzdálenost od všech jeho stran a je proto průsečíkem os vnitřních úhlů trojúhelníka
Trojúhelníková nerovnost	podmínka pro velikosti stran trojúhelníka: součet každých dvou stran musí být větší než strana třetí

2.2 Volné a vázané zadání

Vždy než se pustíte do řešení konstrukční úlohy, přečtěte si pozorně zadání! V konstruktivní geometrii totiž rozlišujeme dva typy zadání: **vázané zadání** (hovoříme o tzv. **polohových úlohách**) a **volné zadání** (zde hovoříme o tzv. **nepolohových úlohách**).

Příklad vázaného zadání (tj. polohové úlohy): Je dána úsečka AB, $|AB| = c = 7$ cm. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které platí: $b = 4$ cm, $\gamma = 30°$.
Příklad volného zadání (tj. nepolohové úlohy): Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které platí: $c = 7$ cm, $b = 4$ cm, $\gamma = 30°$.

polohová úloha

nepolohová úloha

Zhotovíte-li si hned po letmém přečtení náčrtek, můžete podlehnout mylnému dojmu, že obě zadání jsou stejná.

Ale pozor – je zde zásadní rozdíl!

1) u polohové úlohy musíte postup řešení odvíjet od již umístěné úsečky AB, kdežto u nepolohové úlohy můžete začít kterýmkoli zadaným prvkem. Je tedy většinou snazší řešit nepolohovou úlohu.

2) chceme-li určit počet řešení polohové úlohy, spočítáme všechna řešení, která při daném zadání vycházejí, kdežto u nepolohové úlohy bereme v úvahu jen řešení tvarově odlišná.

2.3 Fáze řešení konstrukční úlohy

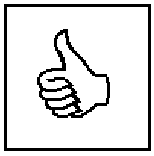
rozbor

V úvodu kapitoly jsem vás již upozornila na nejdůležitější fázi řešení konstrukční úlohy – a tou je **rozbor.**
Spočívá v tom, že si načrtneme trojúhelník, jako kdyby byl již vyřešený, a zakreslíme do něj (nejlépe barevně – a nejlépe vždy toutéž vybranou barvou) zadávající prvky trojúhelníka. Ty jsou tři, pokud ovšem některý z nich není nahrazen popisem vlastností trojúhelníka. Pokud máte zadánu polohovou úlohu, zvýrazněte silněji umístěný prvek, abyste si při řešení uvědomili, že s ním nemůžete manipulovat.
Náčrtek si pořádně prostudujte, uvědomte si, který vrchol trojúhelníka vám chybí a jak byste jej mohli doplnit. Vrchol je bod – a chceme-li v konstrukční úloze sestrojit **bod**, budeme jej konstruovat jako **průsečík dvou čar**, které lze popsat pomocí jejich vlastností. Často to bývá některá z **množin bodů daných vlastností** popsaných v první kapitole.
Cílem rozboru tedy je nalezení cesty od zadávajících prvků ke všem chybějícím vrcholům trojúhelníka. Je vhodné každý nalezený krok zakreslit do rozboru a podle rozboru stanovit **postup konstrukce.**

postup konstrukce

Postup konstrukce musí splňovat následující požadavky:

1. U polohové úlohy musí být prvním krokem sestrojení pevně umístěného objektu ze zadání; u nepolohové úlohy to může být kterýkoli vhodný zadávající prvek.
2. Pojmenování objektu použitého v rozboru musí být shodné s pojmenováním téhož objektu v postupu.
3. Žádný krok postupu nesmí obsahovat objekt, který v danou chvíli ještě není sestrojen.



Pokud vám dodržení této zásady činí potíže, vezměte si čistý list papíru a na něj si od ruky rozkreslujte konstrukci po krocích – tak, jak postupně vzniká. Každý nový krok ihned zapište do postupu – pak se vám nemůže stát, že byste použili např. bod, který v dané fázi ještě neexistuje. Nejste-li si ani potom jisti, najděte si pomocníka, který ovládá základní geometrickou symboliku, předložte mu svůj postup (bez zadání!) a sledujte, zda podle vašeho postupu sestrojí bez nápovědy to, co jste zamýšleli. Postup konstrukce je vlastně jakási „kuchařka“, podle které by měl každý umět „navařit“ přesně to, co bylo požadováno.

4. **Jak** se sestrojují základní množiny bodů daných vlastností (tj. ty, které jsou uvedeny v kap.1) se do postupu nemusí psát – tam zapisujete pouze to, **že** se sestrojí.
5. Při řešení geometrických konstrukčních úloh se stává, že úloha má více řešení. Například průnikem přímky s kružnicí vzniknou dva body vedoucí ke dvěma odlišným řešením. V takovýchto případech zapisujeme postup pouze pro jedno řešení a rozdvojení řešení v konstrukci provedeme například zavedením indexů k témuž písmenu.

6. Jsou-li již popsány konstrukce všech vrcholů trojúhelníka a zbývá jen doplnit jeho strany, můžeme použít závěrečný pokyn: **ΔABC**, který se běžně užívá jako pokyn k dokončení konstrukce.

konstrukce

Další fází může (ale nemusí) být samotná **konstrukce.** Základními pomůckami jsou pravítko a kružítko - provádíme tzv. eukleidovské konstrukce. Je však praktické použít trojúhelník s ryskou, která urychluje konstrukci kolmic.

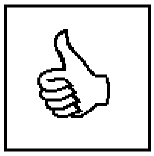
počet řešení

U zadání s konkrétními číselnými hodnotami je nutné ke konstrukci připsat **počet řešení** konstrukční úlohy. U úloh s jedním nebo více parametry se provádí **diskuse počtu řešení** v závislosti na vzájemných vazbách mezi těmito parametry.

zkouška

Po konstrukci je třeba provést **zkoušku**, tj. ověřit, zda trojúhelník, který jste sestrojili, má všechny vlastnosti požadované zadáním úlohy. Tuto zkoušku můžete provést ústně, nemusíte ji zapisovat. Můžete si zavést svou vlastní zkratku na znamení toho, že jste zkoušku provedli – např. ***ZK.***√

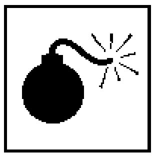
Provádět u všech příkladů důsledně konstrukci – navíc s důsledným vyrýsováním všech řešení, může být ve svém důsledku neproduktivní. Při velkém množství zadaných úloh je praktičtější vesměs provádět rozbory a zapisovat klíčové body postupu konstrukce. Přesné vyrýsování provádějte např. jen u každé třetí úlohy, případně sestrojte jen jedno řešení a z ostatních zachyťte jen po jednom klíčovém bodu.



2.4 Konstrukční využití těžnice trojúhelníka

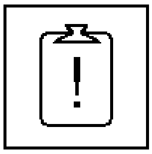
těžnice

Je-li jedním z prvků zadávajících trojúhelník jeho **těžnice,** můžeme při konstrukci využít její vlastnosti:



1. spojuje vrchol se středem protilehlé strany ⇒ lze využít kružnice mající středy v těchto bodech a poloměr rovný velikosti těžnice
2. tento střed strany lze považovat za střed středové souměrnosti převádějící hledaný trojúhelník na trojúhelník vytvářející spolu s hledaným trojúhelníkem rovnoběžník ⇒ lze využít doplnění trojúhelníka na rovnoběžník (viz dále Př. 2)
3. leží na ní těžiště, které ji dělí v poměru 2 : 1, přičemž větší díl je blíže vrcholu ⇒ lze využít kružnice mající podle polohy poloměr roven $\frac{1}{3}$, resp. $\frac{2}{3}$ velikosti těžnice

Pozorně si prostudujte následující ukázkové příklady a pak se sami pokuste o řešení zadaných úloh.

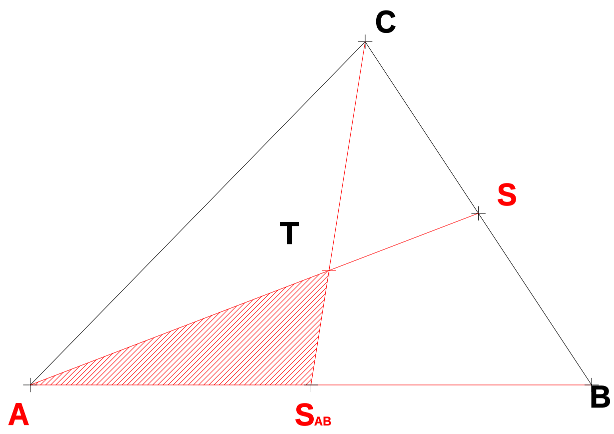


Příklad 1:

Je dána úsečka **AS**, **|AS| = 4,5 cm**. Sestrojte trojúhelník **ABC** s těžnicí **AS**, je-li dáno: **t_c = 6 cm, c = 7 cm.**

Řešení:
Zadaná úloha je polohová, při jejím řešení se musí nutně vycházet od umístěné úsečky **AS**. Rozbor úlohy je proveden podle náčrtku, ve kterém jsou barevně vyznačeny zadávající prvky:

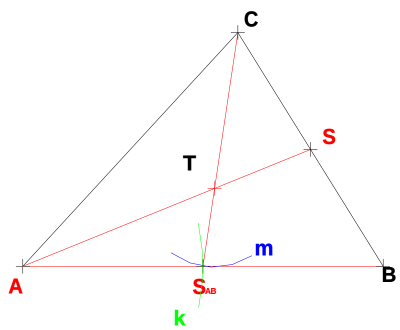
Náčrtek:



Rozbor:

Je dána úsečka **AS**, která je těžnicí, lze na ni ve dvou třetinách délky tedy umístit těžiště **T**. Dále jsou zvýrazněny další zadávající prvky – úsečka **AB** a těžnice na tuto stranu. Povšimněte si trojúhelníka **ATS_{AB}**. Jakmile se vám stane, že v náčrtku uvidíte uzavřený obarvený obrazec – znáte vlastně tři strany tohoto trojúhelníka a jste tudíž schopni ho sestrojit pomocí

dvou kružnic $k\left(A;\frac{c}{2}=3{,}5cm\right)$ a $m\left(T;\frac{1}{3}t_c=2cm\right)$:



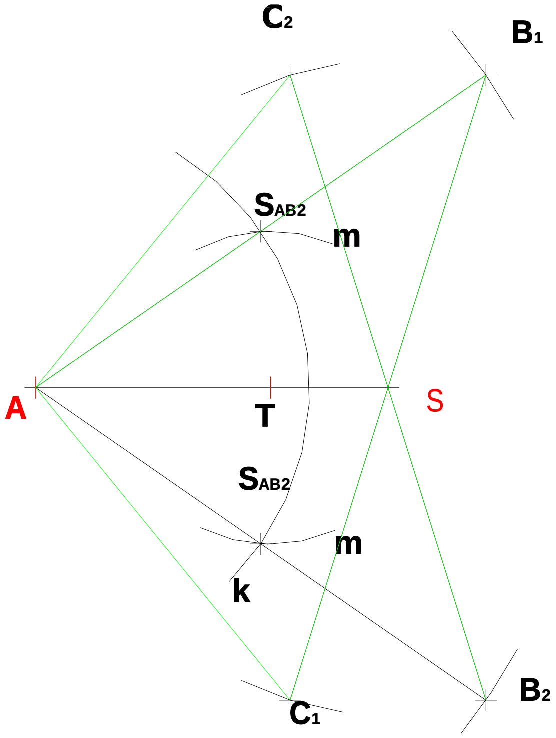
Nyní je sestrojen trojúhelník **ATS_{AB}**, zbývá sestrojit vrcholy **B** a **C**. Bod **B** leží na polopřímce **AS_{AB}** ve vzdálenosti **c** od **A,** bod **C** je středově souměrný s bodem **B** podle středu **S.**
Rozbor je hotov – zbývá zapsat postup konstrukce. Budu používat běžnou množinovou symboliku – pokud potřebujete, lze ji nastudovat např. v učebnici [1], str.189.

Postup konstrukce: | **Vysvětlivky ke konstrukci:**

1. $AS;\ |AS|=4{,}5cm$ - sestrojte úsečku **AS** délky 4,5 cm
2. $T;\ T\in AS,\ |AT|=\frac{2}{3}|AS|=3cm$ - sestrojte bod **T** na **AS**, že **|AT|** = 3 cm
3. $k;\ k\left(A;\frac{c}{2}=3{,}5cm\right)$ - sestrojte kružnici **k** se středem **A** a poloměrem 3,5cm
4. $m;\ m\left(T;\frac{1}{3}t_c=2cm\right)$ - sestrojte kružnici **m** se středem **T** a poloměrem 2cm

5. $S_{AB};\ S_{AB} \in k \cap m$ - sestrojte bod **S**, který je průsečíkem **k** a **m**
6. $B;\ B \in \overrightarrow{AS}_{AB}, |AB| = c = 7cm$ - sestrojte bod **B** na polopřímce **AS_{AB}**, vzdálený 7cm od **A**
7. $C;\ S(S): B \to C$ - sestrojte bod **C**, který je obrazem bodu **B** ve středové souměrnosti se středem **S**
8. $\Delta\, ABC$ - dokončete konstrukci

Konstrukce:

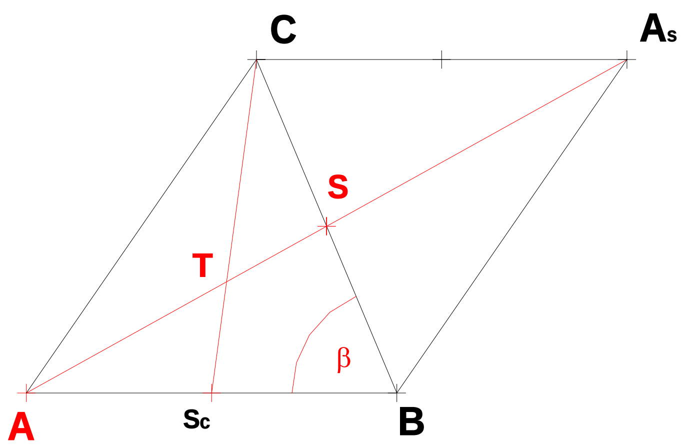


Počet řešení:
Úloha má dvě řešení.

Zkouška:
Obě řešení splňují všechny požadavky dané zadáním úlohy. *ZK.*√

Příklad 2:

Je dána úsečka **AS**, **|AS| = 6 cm**. Sestrojte trojúhelník **ABC** s těžnicí **AS**, je-li dáno: **t_c = 4,5 cm, β = 60°.**

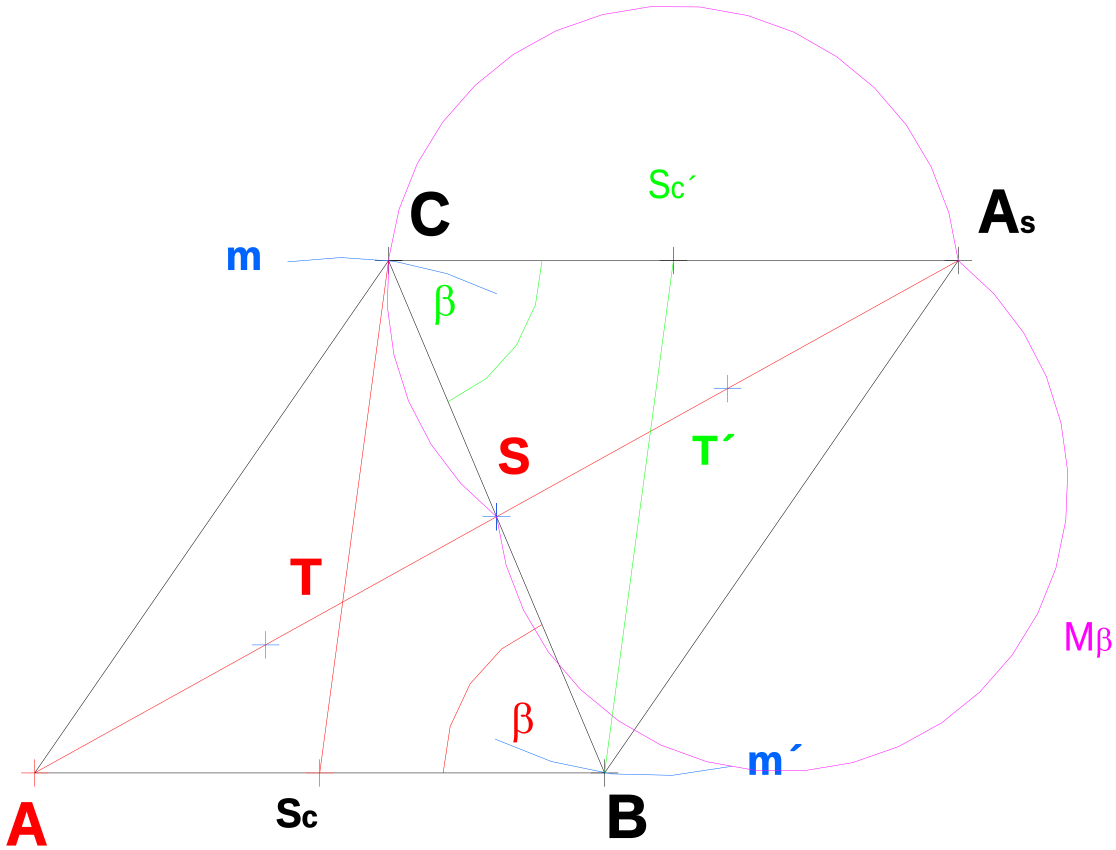


Náčrtek a rozbor:
Vycházím od úsečky **AS**, která je daná svým umístěním. Stejně jako v minulé úloze na ní sestrojím těžiště **T**.
Bod **C** bude jistě ležet na kružnici se středem v bodě **T** a poloměrem rovným ⅔ těžnice **t_c**.

Bod **B** má tu vlastnost, že z něj je vidět úsečku **AS** pod úhlem β. A takovou množinu bodů umíme sestrojit – viz kap.1.6.

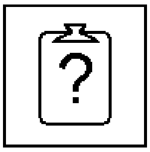
My ovšem potřebujeme **dvě** takové množiny, které mají společný **tentýž** vrchol trojúhelníka. Právě v těchto případech se využívá ***doplnění trojúhelníka na rovnoběžník ve směru zadané těžnice.*** Vztahy z původního trojúhelníka jsou přeneseny do nově vytvořeného středově souměrného trojúhelníka, kde znovu začnu hledat bodové množiny, jejichž průnikem je některý z chybějících vrcholů trojúhelníka. Více napoví následující obrázek:

Pokračování rozboru:



V trojúhelníku **BCA$_S$,** který je středově souměrný podle středu **S** s trojúhelníkem **CBA**, je úhel β u vrcholu **C**. Bod **C** je tedy prvkem množiny **M**$_\beta$, což je množina bodů, z nichž vidíme úsečku **SA$_S$** pod úhlem β. Je tedy zřejmé, že bod **C** leží v průniku **m** a **M**$_\beta$.
Chybějící bod **B** doplním středově souměrně s bodem **C** podle bodu **S.**

Promyslete si, jak lze obdobným způsobem získat místo bodu **C** bod **B** (**M**$_\beta$ sestrojíme nad **AS** a místo kružnice **m** použijeme **m´**).

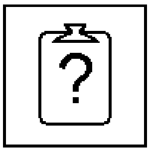


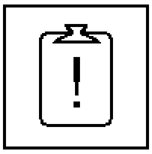
Nyní jednotlivé kroky zapíšeme do postupu konstrukce:

Postup konstrukce:	**Vysvětlivky ke konstrukci:**
1. $AS;\ \lvert AS\rvert = 6\,cm$	- viz př. 1
2. $T;\ T \in AS,\ \lvert AT\rvert = \frac{2}{3}\lvert AS\rvert = 4\,cm$	- viz př. 1
3. $T';\ S(S): T \to T'$	- sestroj bod **T´**, který je obrazem bodu **T** ve středové souměrnosti se středem **S**
4. $A_S;\ S(S): A \to A_S$	- sestroj bod $\mathbf{A_S}$, který je obrazem bodu **A** ve středové souměrnosti se středem **S**
5. $m;\ m\left(T, \frac{2}{3}t_c = 3\,cm\right)$	- sestroj kružnici **m** se středem **T** a pol. 3 cm
6. $M_\beta = \{X;\ \lvert\angle SXA_S\rvert = \beta = 60°\}$	- sestroj množinu bodů, z nichž je vidět úsečku $\mathbf{SA_S}$ pod úhlem 60° (viz kap.1.6)
7. $C;\ C \in m \cap M_\beta$	- **C** vyznač v průniku **m** a $\mathbf{M_\beta}$ (dvě řešení!)
8. $B;\ S(S): C \to B$	- sestroj bod **B**, který je obrazem bodu **C** ve středové souměrnosti se středem **S**
9. $\Delta\, ABC$	- dokonči konstrukci

Konstrukci si zkuste vyrýsovat sami – opírejte se přitom o rozbor a postup úlohy. Vyrýsuje **obě dvě řešení.**

- nezapomeňte ***ZK.***√



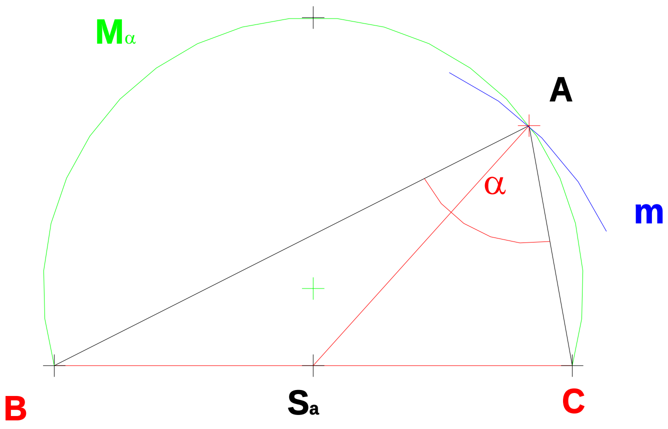


Příklad 3:

Sestrojte trojúhelník **ABC**, je-li dáno: **a = 6 cm, $\mathbf{t_a}$ = 3,5 cm,** α **= 75°**.

Toto je ukázka nepolohové úlohy. Postup řešení stanovím podle náčrtku:

Náčrtek:

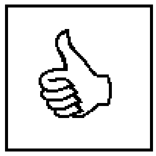


Rozbor:

Nejprve umístím úsečku **BC** o velikosti **a.** Nad touto úsečkou je úhel α, mohu tedy využít množinu $\mathbf{M_\alpha}$, tj. množinu vrcholů úhlů, z nichž vidíme úsečku **BC** pod úhlem α. V této množině leží hledaný vrchol **A.** Vrchol **A** leží také na kružnici **m** se středem ve středu úsečky **BC**, která má poloměr $\mathbf{t_a}$.

Upozornění:

Častou chybou při řešení této úlohy bývá, že studenti vedení snahou vyhnout se konstrukci množiny $\mathbf{M}_\alpha$ začínají konstrukci od úhlu α, přičemž **mylně** předpokládají, že těžnice tento úhel půlí. Pozor! Osa vnitřního úhlu a těžnice procházející týmž vrcholem jsou v obecném případě **různé přímky.**



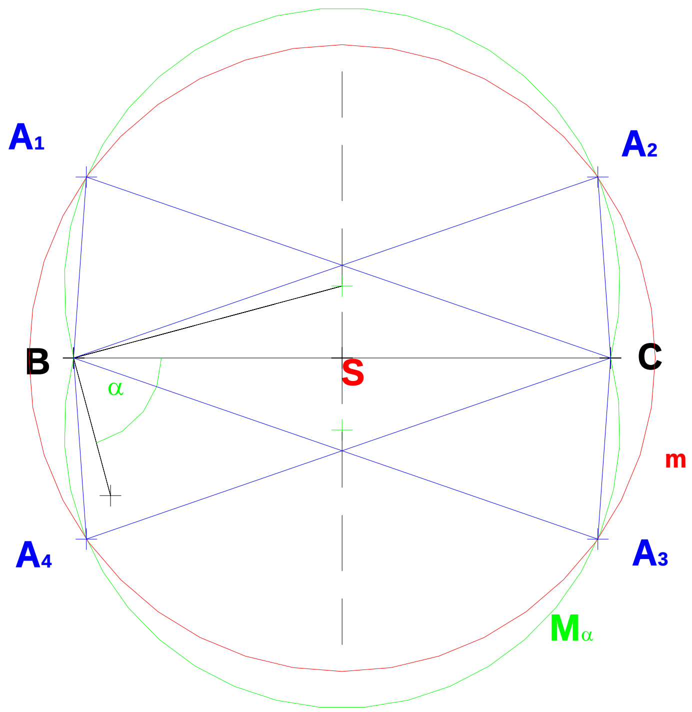
Postup konstrukce:

1. $BC;\ |BC| = a = 6\,cm$
2. S_a; S_a *je střed BC*
3. $m; m(S_a, t_a = 4\,cm)$
4. $M_\alpha = \{X; |\angle BXC| = \alpha = 75°\}$
5. $A;\ A \in m \cap M_\alpha$
6. $\Delta\, ABC$

Pozn.:

Věřím, že se zde obejdete bez vysvětlivek. Pokud ne, vraťte se k předchozím příkladům.

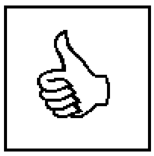
Konstrukce:



Počet řešení:

Úloha je nepolohová, proto beru v úvahu jen tvarově odlišná řešení. Protože všechny čtyři výsledné trojúhelníky $\mathbf{A_1BC}$, $\mathbf{A_1CB}$, $\mathbf{A_1BC}$, $\mathbf{A_1CB}$, jsou shodné, má úloha má jediné řešení. – nezapomeňte ***ZK.***√

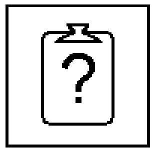
K procvičení tématiky podkapitoly 2.4 vám předkládám k samostatné práci několik úloh. Jejich řešení – tj. postupy konstrukcí - naleznete v kapitole Řešení úloh. Přemístit se k příslušnému řešení můžete kliknutím na hypertextový odkaz – tj. na číslo odkazované stránky.



Úloha 1:

Je dána úsečka **AS**, $|AS|$ = **t_a= 6 cm**. Sestrojte trojúhelník **ABC**, pro který je úsečka **AS** těžnicí a kde platí**: t_b = 5 cm, t_c = 4 cm.**

(Řešení viz str. 33)



Úloha 2:

Je dána úsečka **AS**, $|AS|$ **= t_a = 6 cm**. Sestrojte trojúhelník **ABC**, pro který je úsečka **AS** těžnicí a kde platí: **a = 8 cm, γ = 60°.**

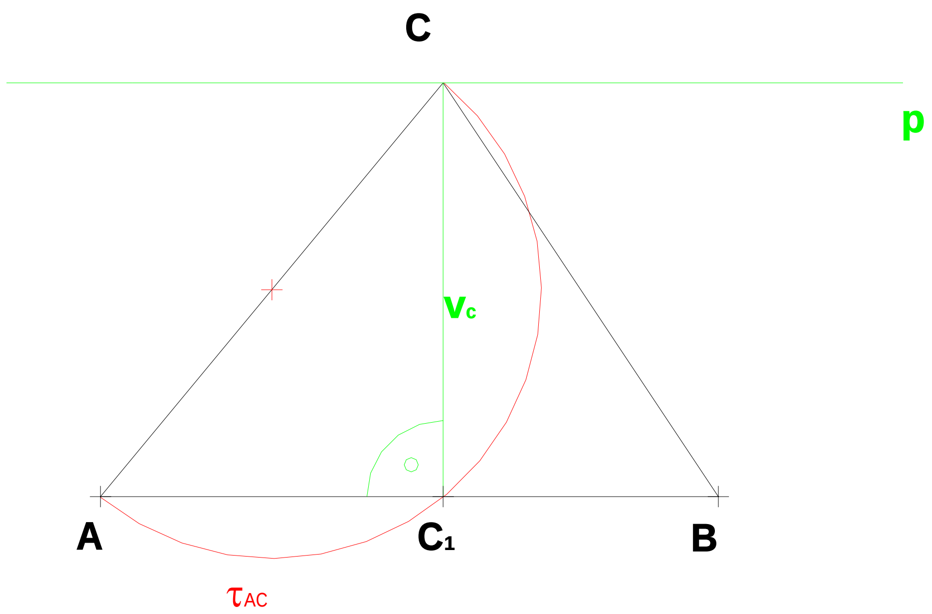
(Řešení viz str. 33)

Úloha 3:

Sestrojte trojúhelník **ABC**, pro který platí: **b = 6 cm, t_b = 2 cm, γ = 30°**.

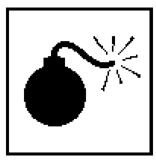
(Řešení viz str. 33)

2.5 Konstrukční využití výšky trojúhelníka

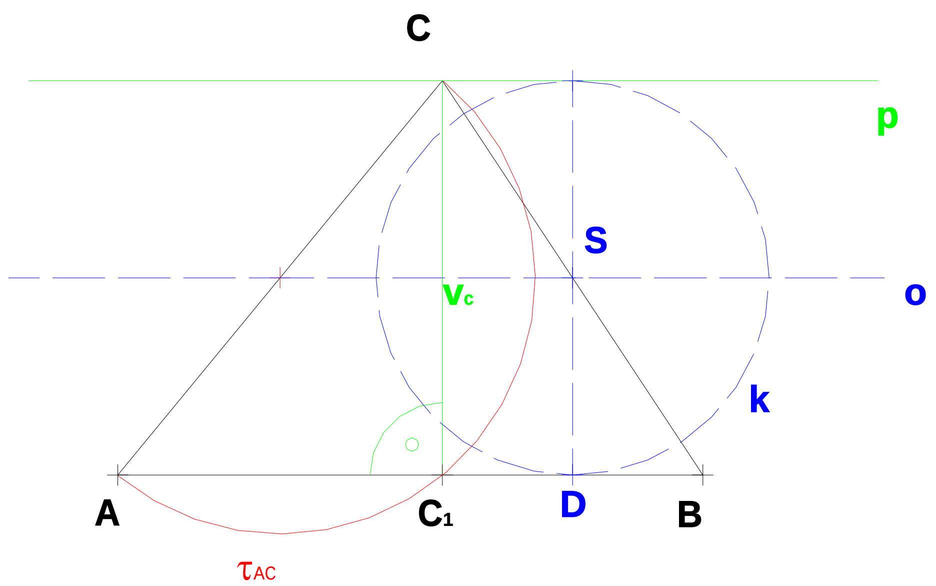


výška

Je-li jedním ze zadávajících prvků trojúhelníka jeho výška, můžete při konstrukci využít její vlastnosti:



1. výška leží na kolmici **CC_1** spuštěné z vrcholu na protilehlou stranu
2. pata **C_1** této kolmice leží na Thaletově kružnici sestrojené nad stranou **AC** jako nad průměrem (též ovšem leží na Thaletově kružnici nad **BC**)
3. je-li zadána strana **AB** a výška na tuto stranu, leží bod **C** na rovnoběžce **p** $\parallel$ **AB** ve vzdálenosti rovné výšce **v_c.** (Takové přímky jsou dvě – druhá v polorovině opačné vzhledem k **AB**)
4. střed **S** strany **BC** leží na ose pásu rovnoběžek **p** a **AB.** Sestrojíte-li kružnici **k** o poloměru rovném polovině výšky **v_c**, která má střed v tomto středu **S,** <u>je přímka obsahující stranu **AB** tečnou této kružnice !</u> (viz následující obrázek):



Pozorně si prostudujte následující ukázkové příklady a pak se sami pokuste o řešení zadaných úloh. Postupy konstrukcí najdete na uvedených stránkách.

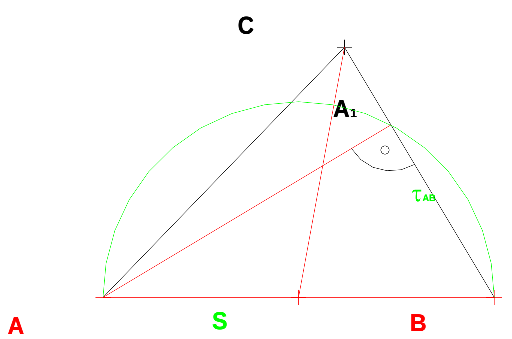
Příklad 4:

Je dána úsečka **AB**, $|AB|$ = **c = 6 cm**. Sestrojte trojúhelník **ABC**, je-li dáno: v_a **= 4 cm**, t_c **= 4 cm**.

Řešení:

Zadaná úloha je polohová, při jejím řešení musíme nutně vycházet od umístění úsečky **AB**. Provedeme rozbor úlohy, v náčrtku vyznačíme červeně zadávající prvky:

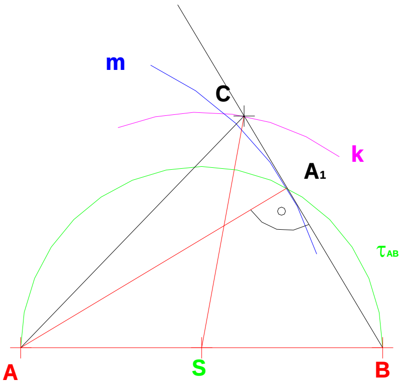
Náčrtek:



Rozbor:

l **A_1** - pata přímky, na níž leží výška v_a, rcholem pravého úhlu nad úsečkou **AB**. í tudíž na Thaletově kružnici τ_{AB} a časně je od **A** vzdálen o délku v_a. vá nalézt dvě množiny bodů pro strukci bodu **C**. Připomínám, že bod lám jako průsečík dvou čar. Jedna ch bude přímka **BA_1**, druhá kružnice se dem v bodě **S** a poloměrem t_c.

Do náčrtku proto doplním:

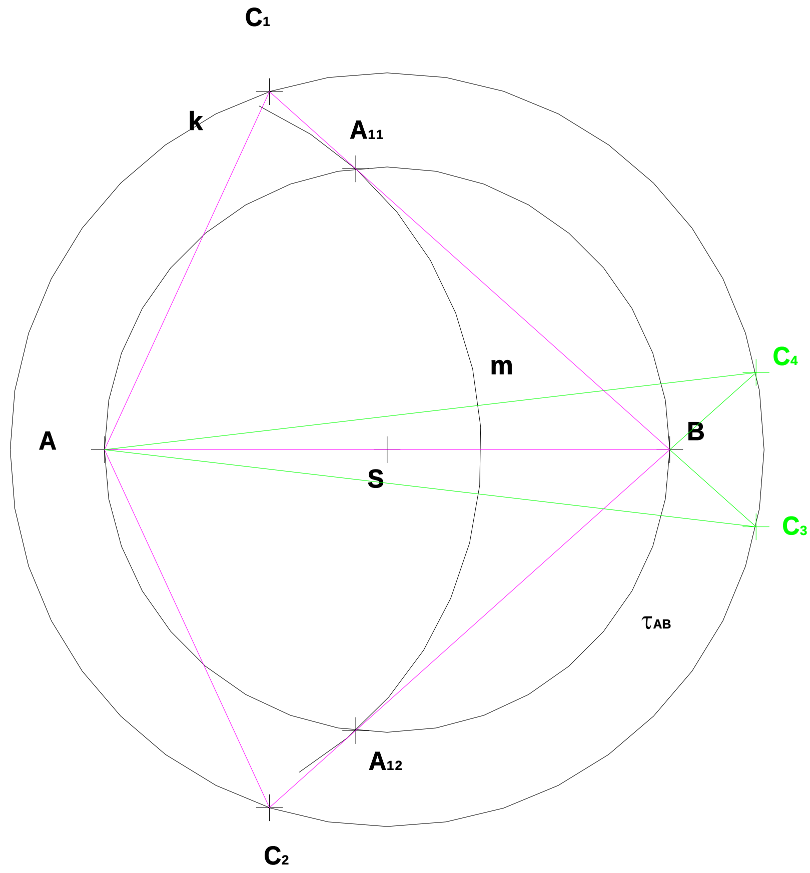


Postup konstrukce:

1. $AB;\ |AB| = c = 6\,cm$
2. *S; S je střed AB*
3. $\tau_{AB} = \{X; |\angle AXB| = 90°\}$
4. $m;\ m(A, v_a = 4\,cm)$
5. $A_1;\ A_1 \in \tau_{AB} \cap m$
6. *přímka BA_1*
7. $k;\ k(S, t_c = 4\,cm)$
8. *C;* $C \in \overleftrightarrow{BA_1} \cap k$
9. $\Delta\ ABC$

Konstrukce:

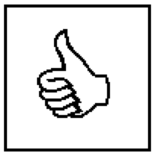
Konstrukci si proveďte nyní sami na papír, jen podle zadání, náčrtku a postupu. Pak teprve zkontrolujte správnost a počet řešení podle následujícího obrázku.



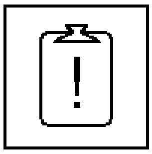
Počet řešení:

Úloha má **celkem 4 řešení**. Pokud se vám nepodařilo nalézt řešení s vrcholy $\mathbf{C_3}$ a $\mathbf{C_4}$, porovnejte znovu svou konstrukci krok za krokem s postupem. Dále si uvědomte polohu výšek **v tupoúhlém trojúhelníku** – dvě z nich vždy leží mimo trojúhelník! Vyhledejte si ve své konstrukci výšku na stranu **a –** tj.úsečku $\mathbf{AA_{11}}$, resp. $\mathbf{AA_{12}}$ – každá přísluší dvěma různým trojúhelníkům. Sami proveďte zkoušku - ***ZK.***√

Pro lepší orientaci v konstrukcích zvětšete v případě potřeby zobrazení na monitoru dočasně např.na 150%.



Příklad 5:

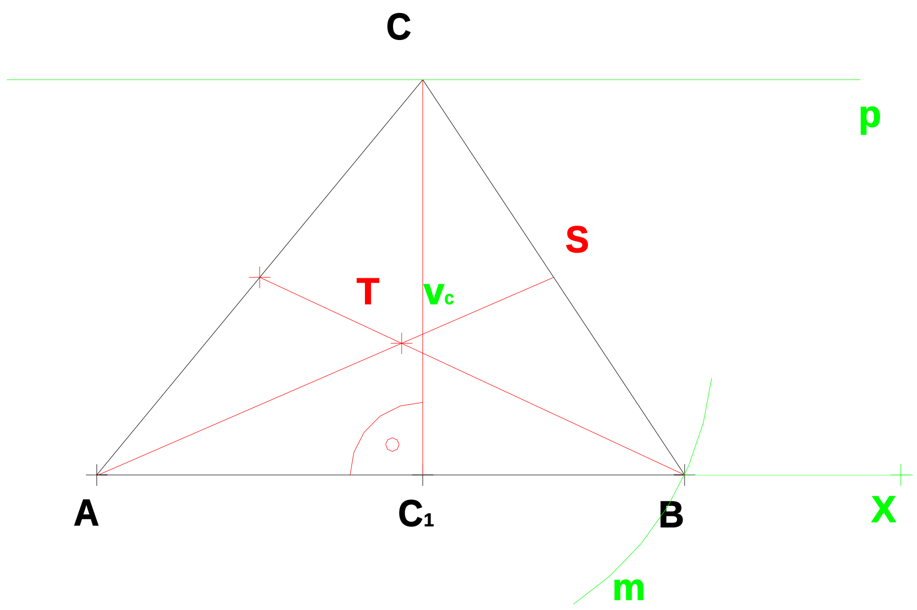


Je dána úsečka **AS**, která je těžnicí trojúhelníka **ABC,** $|AS| = t_a = 7$ **cm**. Sestrojte trojúhelník **ABC**, je-li dáno: $v_c = 4$ **cm,** $t_b = 6$ **cm.**

Řešení:

Zadaná úloha je polohová, při jejím řešení musím nutně vycházet od umístěné úsečky **AS**. Provedu rozbor úlohy, v náčrtku vyznačím červeně zadávající prvky:

Náčrtek:

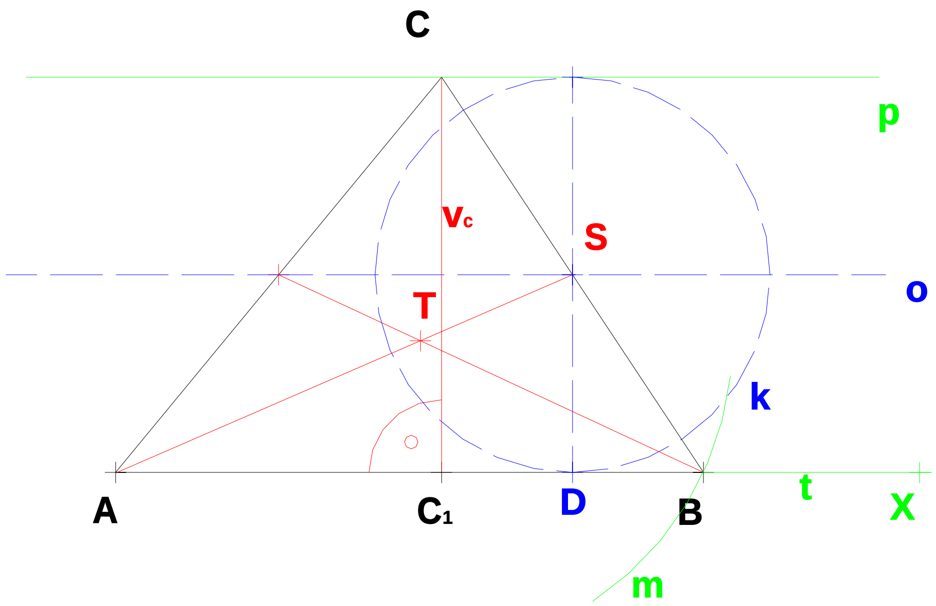


Rozbor:

Na umístěné úsečce **AS** sestrojím těžiště **T**. Zaměřím se na konstrukci bodu **B** – budu se jej snažit získat jako průsečík dvou čar. Bod **B** bude jistě ležet na kružnici **m** se středem v **T** a poloměrem $\frac{2}{3}$ velikosti těžnice t_b.

Nápovědu jak sestrojit další množinu bodů obsahující bod **B** dává bod 4. z úvodu kapitoly 2.5. Dobře si znovu prostudujte návodný obrázek na str. 24.

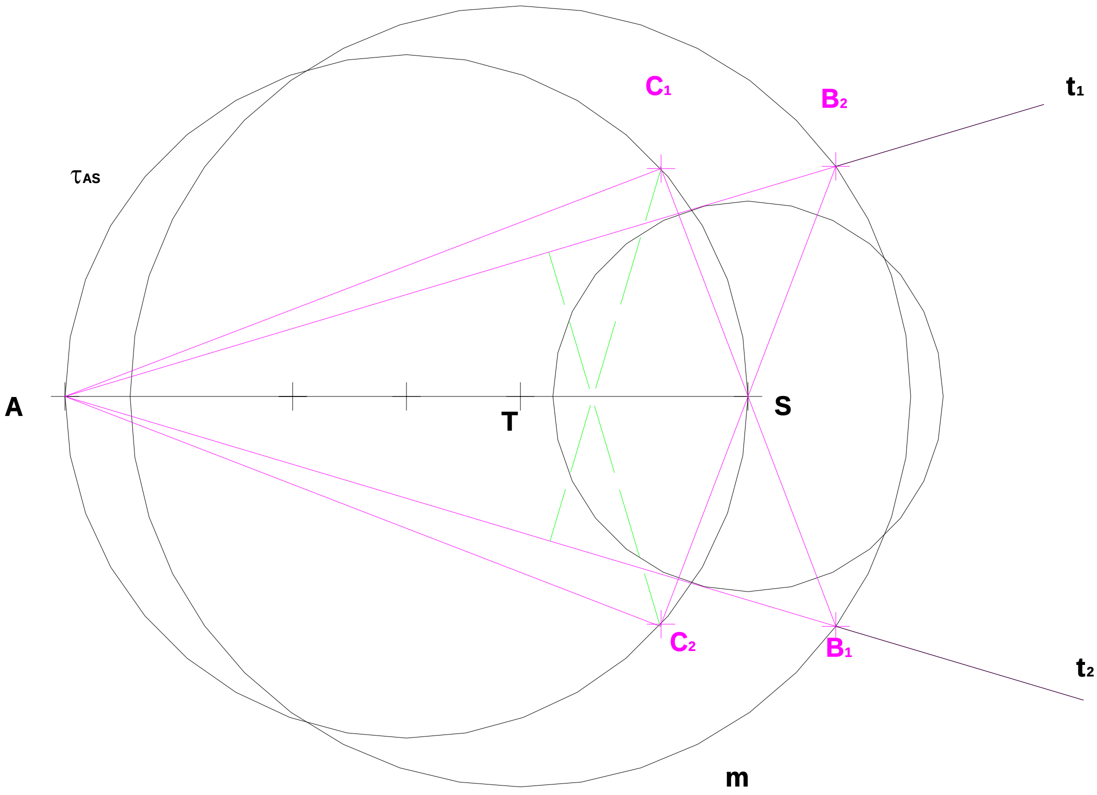
Náčrtek doplněný na základě rozboru:



Postup konstrukce: **Vysvětlivky, komentáře:**

1. $AS;\ |AS| = t_a = 7\,cm$
2. $T;\ T \in AS, |AT|:|TS| = 2:1$ - úsečku **AS** rozdělte na 3 díly g**raficky** užitím tzv. redukčního úhlu, nepoužívejte kalkulačku.
3. $m;\ m\left(T, \frac{2}{3}t_b = 4\ cm\right)$
4. $k;\ k\left(S, \frac{v_c}{2} = 2\,cm\right)$ - pomocná kružnice
5. t; *t je tečna z **A** ke **k*** - základní konstrukce, řeší se užitím Thaletovy kružnice nad **AS**, v průniku s **t** je bod **D**, pak **t**= **AD**
6. $B;\ B \in m \cap t$
7. $C;\ S(S): B \to C$ - lze dořešit i jinak – například užitím přímky p
8. $\Delta\, ABC$

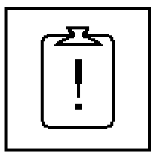
Konstrukce:

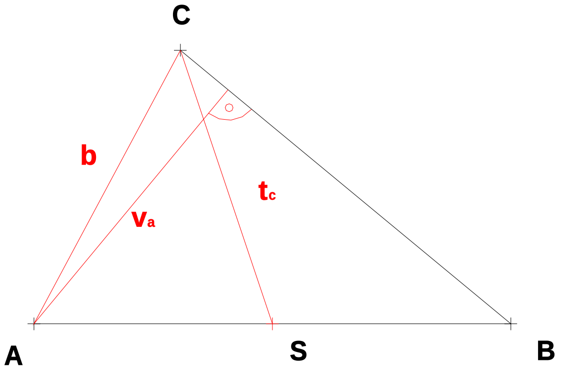


Počet řešení:
Úloha má 2 řešení.

Zkouška:
Sestrojené trojúhelníky mají všechny vlastnosti požadované zadáním. (Výšky na stranu **AB** jsou pro přehlednost znázorněny zeleně.) ***ZK.***√

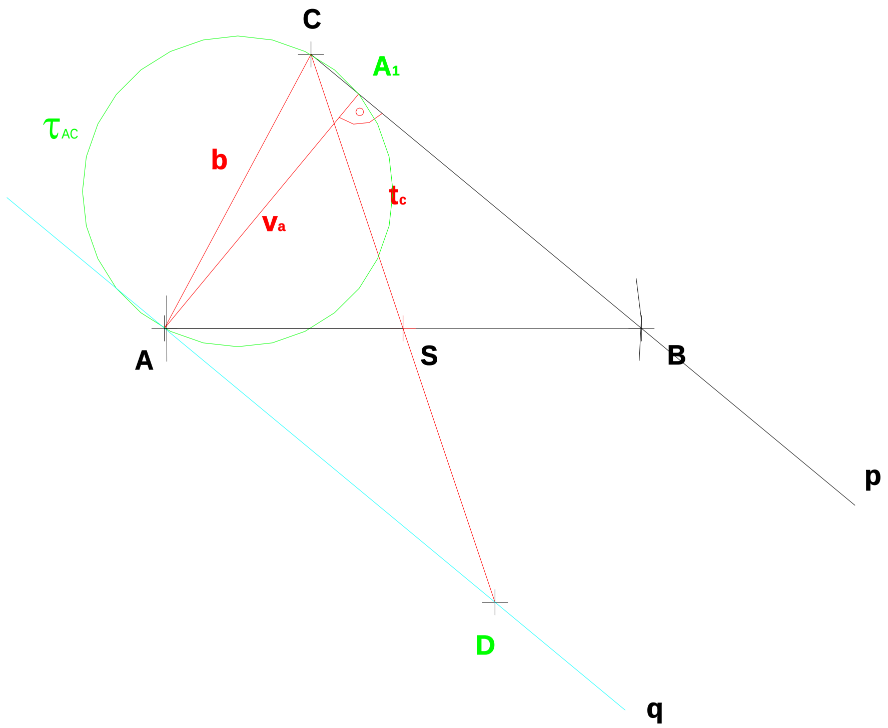
Příklad 6:
Sestrojte trojúhelník **ABC**, pro který platí: **b = 5 cm, v_a = 4 cm, t_c = 3 cm.**





Rozbor:
Protože úloha je nepolohová, mám více možností jak začít. Vyjdu-li z umístění strany **AC**, mohu pro konstrukci výšky na stranu **a** využít Thaletovu kružnici nad **AC**. Dostanu tak směr strany **CB**, nikoli však ještě bod **B**. (Načrtněte !)

Protože je zadána těžnice na stranu **c**, nabízí se metoda doplnění trojúhelníka na rovnoběžník ve směru zadané těžnice – viz následující obrázek:



Mám-li sestrojený bod $\mathbf{A_1}$, sestrojím přímku **p** = $\mathbf{CA_1}$, která udává směr jedné strany rovnoběžníka. Proto s ní vedu rovnoběžku bodem **A**. Rovnoběžník určím úhlopříčkou **CD** (má délku $2\mathbf{t_c}$) a sestrojím její střed **S**. Doplnit bod **B** pak mohu buď středově souměrně s **A** podle **S,** nebo využitím rovnoběžnosti úseček **AC** a **BD**.

Postup:

1. $AC;\ |AC| = b = 5\,cm$
2. $\tau = \{X; |\angle AXC| = 90°\}$
3. $m;\ m(A, v_a)$
4. $A_1;\ A_1 \in m \cap \tau$
5. $p;\ p = \overleftrightarrow{CA_1}$
6. $q;\ (A \in q) \wedge p \parallel q$
7. $k;\ k(C, 2t_c)$
8. $D;\ D \in k \cap q$
9. $S;\ S$ *je střed CD*
10. $B;\ S(S): A \rightarrow B$
11. ΔABC

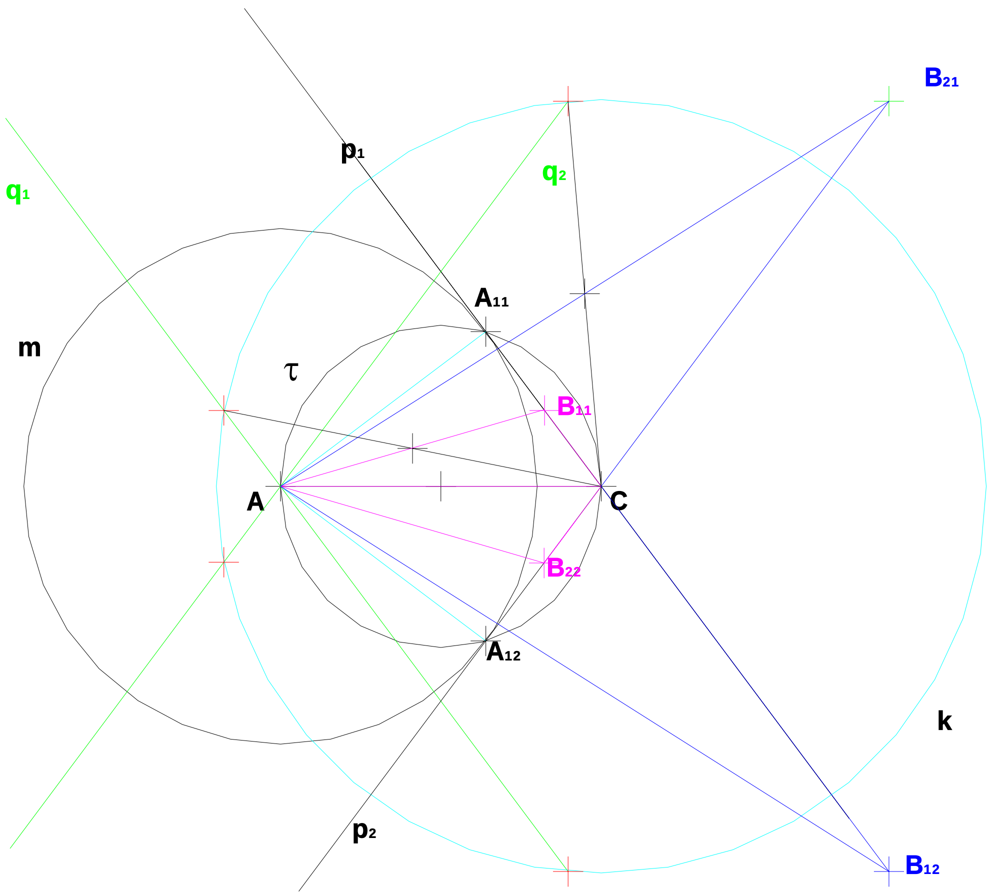
Komentář:

- Thaletova kružnice nad **AC** (krok 2)

- „$\wedge$“ je logická spojka, čte se „a zároveň“ (krok 6)

- **B** je obrazem **A** ve středové souměrnosti se středem **S** (krok 10)

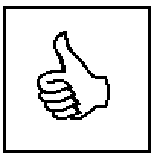
Konstrukce:

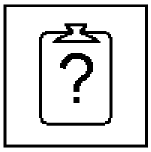


Počet řešení:
Celkově vycházejí dvě dvojice shodných trojúhelníků. Protože řešená úloha je nepolohová, přicházejí v úvahu jen **2 různá, tvarově odlišná řešení.**

Zkouška:
Protože tato konstrukce byla již velice náročná, doporučuji, abyste si u každého výsledného trojúhelníka zvlášť ověřili, kde je výška na stranu **a** (světle modrá barva – u tupoúhlých trojúhelníků leží vně !) a kde je těžnice na stranu **c.**
Přesvědčíte se, že každý sestrojený trojúhelník vyhovuje zadání. (zvětšete si zobrazení !) ***ZK.*** √

K procvičení tématiky podkapitoly 2.5 vám předkládám k samostatné práci několik úloh. Jejich řešení – tj. postupy konstrukcí, naleznete v kapitole Řešení úloh





Úloha 4:
Je dána úsečka CC_1, $|CC_1| = v_c = 5$ **cm**. Sestrojte trojúhelník **ABC**, pro který je úsečka CC_1 výškou na stranu **c** a ve kterém platí: $t_c = 5{,}5$ **cm**, $\alpha = 60°$.

(Řešení viz str. 33)

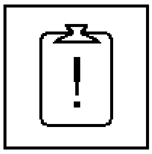
Úloha 5:
Sestrojte trojúhelník **ABC,** víte-li, že: $t_c = 4$ **cm**, $t_a = 6$ **cm**, $v_c = 3{,}5$ **cm**.

(Řešení viz str. 33)

Úloha 6:
Sestrojte trojúhelník **ABC**, víte-li, že: $c = 8$ **cm**, $v_c = 1{,}5$ **cm**, $\gamma = 120°$.

(Řešení viz str.34)

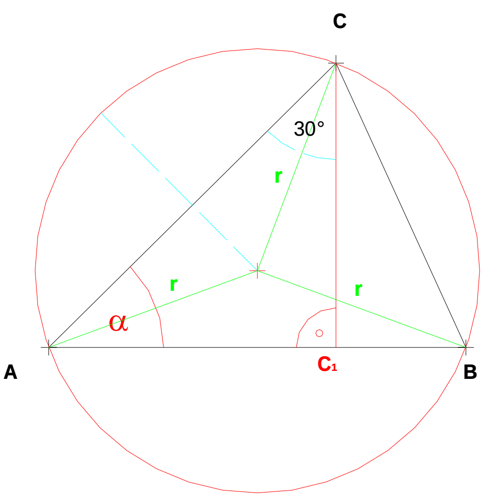
2.6 Další konstrukce trojúhelníka



Příklad 7:
Sestrojte trojúhelník **ABC**, je-li dáno: $v_c = 5$ **cm**, $\alpha = 60°$, $r = 3$ **cm**, přičemž **r** je poloměr kružnice opsané trojúhelníku **ABC**

Řešení:
Zadaná úloha je nepolohová. Provedu rozbor úlohy, v náčrtku vyznačím červeně zadávající prvky:

Náčrtek:



V náčrtku se objevil dílčí trojúhelník, který je možno sestrojit, protože znám tři jeho prvky – je to pravoúhlý trojúhelník ACC_1.($|CC_1| = v_c = 5$ cm, $\alpha = 60°$, tedy $|\angle ACC_1| = 30°$.)

Je-li zadán poloměr kružnice opsané, musíte si uvědomit, že její střed leží na osách stran a že je to navíc bod, který je stejně vzdálen od vrcholů trojúhelníka. Sestrojím tedy buď kružnice s poloměrem **r** se středy ve vrcholech **A, C,** nebo osu úsečky **AC** a pak už jen jednu ze zmíněných kružnic. Dostanu tak střed kružnice opsané.

Po sestrojení kružnice sestrojím bod **B** ležící na polopřímce AC_1.

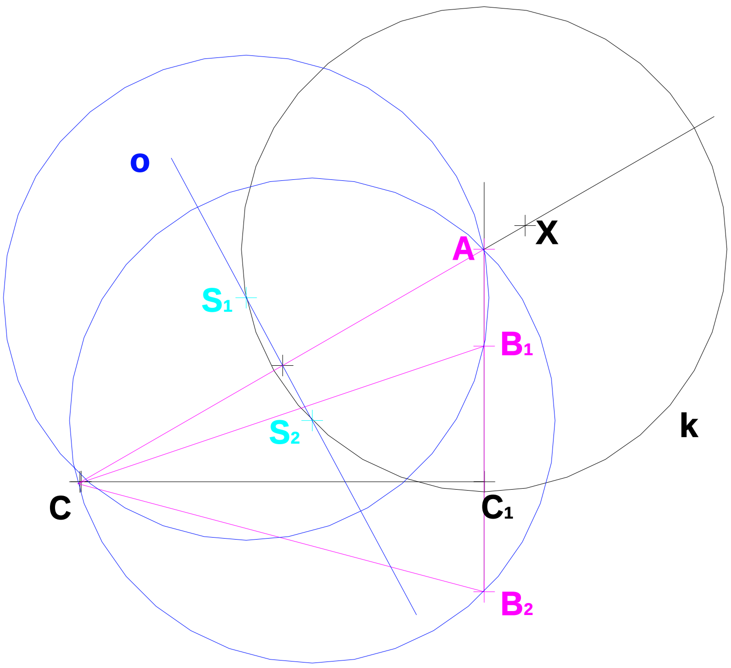
Postup:

1. $CC_1; |CC_1| = v_c = 5\,cm$
2. $\overrightarrow{CX}; |\angle C_1CX| = 90° - \alpha = 30°$
3. p; $C_1 \in p, p \perp CC_1$
4. A; $A \in o \cap \overrightarrow{CX}$
5. ΔACC_1
6. o; o je osa AC
7. $k; k(A, r)$
8. B; $B \in k \cap \overrightarrow{AC_1}$
9. ΔABC

Komentář:

*- ostré úhly v pravoúhlém trojúhelníku se doplňují do 90°. Nanášejí se pomocí polopřímky tvořící jeho rameno zadané pomocným pracovním bodem **X**; **A** nelze použít, v tu chvíli ještě neexistuje !*

Konstrukce:

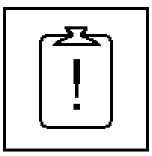


Počet řešení:

Daná úloha je nepolohová, vycházejí dvě tvarově odlišná řešení, úloha má tedy **dvě řešení.** (Sami proveďte zkoušku) ***ZK.***√

Příklad 8:

Sestrojte trojúhelník **ABC**, je-li dáno: **a = 8 cm,** γ **= 60°,** ρ **= 2 cm**, přičemž ρ je poloměr kružnice vepsané trojúhelníku **ABC**.



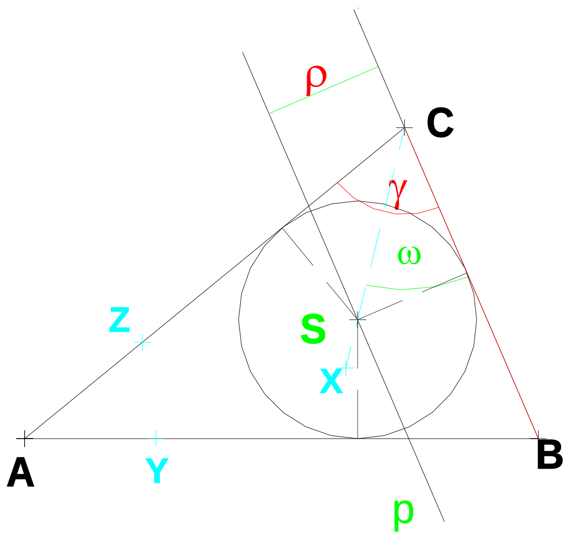
Řešení:

Zadaná úloha je nepolohová. Provedu rozbor úlohy, v náčrtku vyznačím červeně zadávající prvky.

Rozbor:

Začnu umístěním úsečky **BC.** Střed kružnice vepsané trojúhelníku je bod, který leží na osách vnitřních úhlů, a proto je stejně vzdálen od všech jeho stran. Jmenovaná vzdálenost je rovna poloměru ρ. Použiji proto ekvidistantu přímky **BC** ve vzdálenosti ρ. Střed kružnice vepsané leží na ní a dále pak na ose úhlu u vrcholu **C.** Sestrojím kružnici vepsanou a strany trojúhelníka pak budou tečnami této kružnice vedenými z krajních bodů úsečky **BC.**

Náčrtek:

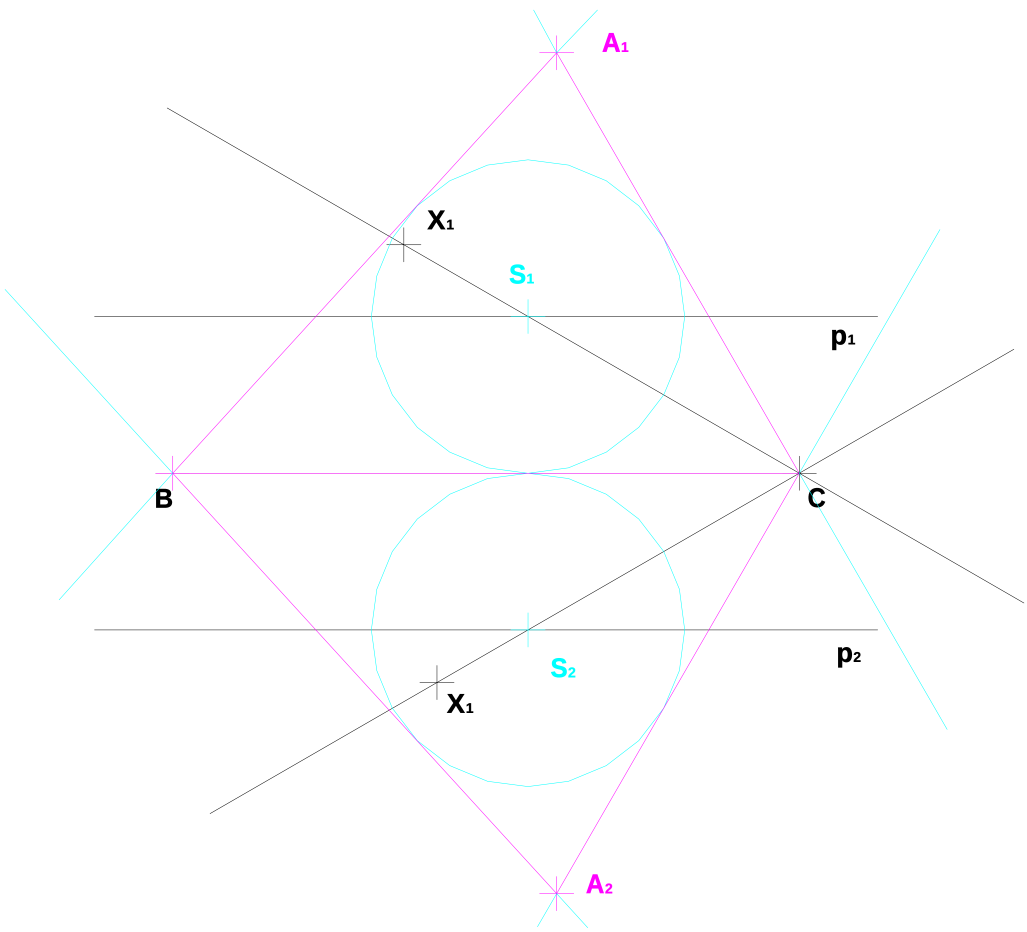


Postup:

1. $CB;\ |CB| = a = 8\,cm$
2. $p;\ p \| CB,\ |p, CB| = \rho = 2\,cm$
3. $\overrightarrow{CX};\ |\angle BCX| = \omega = \frac{1}{2}\gamma$
4. $S;\ S \in p \cap \overrightarrow{CX}$
5. $k;\ k(S, \rho = 2\,cm)$
6. $\overrightarrow{BY};\ \overrightarrow{BY}$ *je tečna z* ***B*** *ke* ***k***
7. $\overrightarrow{CZ};\ \overrightarrow{CZ}$ *je tečna z* ***C*** *ke* ***k***
8. $A;\ A \in \overrightarrow{BY} \cap \overrightarrow{CZ}$
9. $\Delta\, ABC$

Body 6 a 7 se v postupu nerozepisují. Konstrukce tečny z bodu ke kružnici patří k základním konstrukcím, řeší se užitím Thaletovy kružnice nad **BS**, resp. **CS**.

Konstrukce:



Počet řešení:
Úloha je nepolohová, při konstrukci vyšly 2 shodné trojúhelníky, úloha má tedy jediné řešení. Toto řešení splňuje všechny požadavky ze zadání.

ZK.√

Úloha 7:
Sestrojte trojúhelník **ABC**, je-li dáno: **a = 6 cm, v_b = 2,5, r = 3,5 cm**, přičemž **r** je poloměr kružnice opsané trojúhelníku **ABC**.

(Řešení viz str. 34)

Úloha 8:
Sestrojte trojúhelník **ABC**, je-li dáno: **v_c = 6 cm, α = 75°, ρ = 2 cm**, přičemž ρ je poloměr kružnice vepsané trojúhelníku **ABC**.

(Řešení viz str. 34)

2.7 Řešení úloh

Řešení úlohy 1: (ze strany 22)
V rozboru doplňte trojúhelník na rovnoběžník ve směru umístěné těžnice **AS.** Těžiště doplněného trojúhelníka označte **T´.** Sestrojte např. trojúhelník **TT´B,** ve kterém známe všechny tři strany: $|TT'| = \frac{2}{3}t_a$, $|BT'| = \frac{2}{3}t_c$, $|TB| = \frac{2}{3}t_b$. Bod **C** doplňte středově souměrně s **B** podle **S**. Úloha je polohová, má dvě řešení.

Řešení úlohy 2: (ze strany 22)
Nad umístěnou úsečkou **AS** sestrojte množinu bodů **$M_{60°}$,** z nichž je vidět úsečku **AS** pod úhlem **60°**. Hledaný bod **C** leží v průniku této množiny a kružnice **k(S,½a = 4 cm)**. Bod **B** doplňte středově souměrně s **C** podle středu **S.** Úloha je polohová, má dvě řešení.

Řešení úlohy 3: (ze strany 22)
Umístěte úsečku **AC**, sestrojte polopřímku **CX** tak, aby $|\angle ACX| = 30°$. Na polopřímce **CX** sestrojte bod **B** v průniku s kružnicí, která má střed ve středu úsečky **AC** a poloměr **t_b.** Úloha je nepolohová, má dvě tvarově odlišná řešení.

Řešení úlohy 4: (ze strany 30)
Úsečka **CC_1** je umístěná. Trojúhelník **CC_1A** je pravoúhlý, jeden z jeho ostrých úhlů má velikost α**,** druhý je tedy **90°-** α. Jeho sestrojením získáte bod **A**. Na prodloužení strany **AC_1** leží bod **S** – střed strany **AB,** přičemž **|CS| = t_c.** **S** je tedy průsečíkem přímky **AC_1** a kružnice se středem v **C** a poloměrem **t_c**. Úloha je polohová, má celkem čtyři řešení.

Řešení úlohy 5: (ze strany 30)
Sestrojte dvě rovnoběžky **p,q**, na **p** vyznačte bod **C.** Kružnice se středem v bodě **C** a poloměrem **t_c** protne přímku **q** v bodě **S** – středu hledané strany **AB.** Na **CS** určete těžiště **T** a sestrojte kružnici se středem v **T** a poloměrem rovným dvěma třetinám těžnice **t_a.** Tato kružnice na **q** vymezí bod **A**. Bod **B** doplňte středově souměrně s **A** podle **S.** Dostáváte čtyři trojúhelníky, po dvou shodná. Úloha je nepolohová, má tedy dvě tvarově odlišná řešení.

Řešení úlohy 6: (ze strany 30)
Začněte umístěním strany AB o délce **c.** Sestrojte ekvidistantu této přímky ve vzdálenosti výšky na stranu **c.** Bod **C** bude průsečíkem ekvidistanty s množinou bodů, z nichž vidíme úsečku **AB** pod úhlem γ. Dostanete čtyři řešení, která jsou ovšem shodnými trojúhelníky. Nepolohová úloha má tak jediné řešení. Při konstrukci nezapomeňte na to, že zadaný úhel je tupý a kruhové oblouky, které sestrojujete, jsou tudíž menší než půlkružnice.

Řešení úlohy 7: (ze strany 33)
Umístěte úsečku **BC**. Patu $\mathbf{B_1}$ výšky na stranu **b** sestrojte pomocí Thaletovy kružnice nad **BC**. Kružnici opsanou můžete sestrojit, protože znáte její poloměr a dva její body **B** a **C**. Na ní a na přímce $\mathbf{CB_1}$ leží bod **A**. Nepolohová úloha má jedno řešení.

Řešení úlohy 8: (ze strany 33)
Sestrojte úhel **XAY** o velikosti α. Střed kružnice vepsané leží na ose úhlu a na rovnoběžce s jeho ramenem (např. **AX**) vzdálené od něj o poloměr ρ. Tuto kružnici sestrojte. Nezapomeňte vyznačit body dotyku na obou ramenech. Bod **C** leží na ramenu **AY** a též na rovnoběžce s **AX** vzdálené od **AX** o výšku $\mathbf{v_c}$. Chybějící stranu **BC** sestrojte jako tečnu vedenou z bodu **C** k vepsané kružnici. Nepolohová úloha má jedno řešení.

2.8 Rady na závěr

Máte za sebou osm podrobně komentovaných řešených příkladů a stejný počet samostatně řešených úloh. V uvedených konstrukcích se objevila většina dílčích konstrukcí, které se vyskytují při konstrukcích trojúhelníků nejčastěji.
Tím by však vaše práce na tématu neměla skončit. Téma kapitoly 2 byste si měli procvičit podle běžně dostupné literatury. Provádět úplná řešení úloh je ovšem velice zdlouhavé. Není účelné, abyste při každé úloze psali detailní postup až do závěrečné tečky či abyste u každého trojúhelníku vyrýsovali detailně všechna řešení. Je efektivnější projít více úloh, provést jejich důkladný rozbor, zapsat klíčové body postupu a konstrukci a její zápis provádět jen u některých úloh.
Doporučím vám nyní úlohy vhodné k dalšímu samostudiu. Příslušné tituly naleznete v seznamu literatury na konci opory.

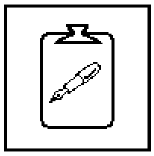
[1]: str. 108, úlohy 2.19 – 2.28
[2]: str. 77, úlohy 14 – 20

Pokud vás problematika konstrukce trojúhelníků zaujala, doporučuji vám příručku [3], kde naleznete nejobsáhlejší informace. Dozvíte se v ní mj. to, že ne vždy lze trojúhelník ze tří zadaných prvků sestrojit za použití kružítka a pravítka (např. je-li dáno: a, b, ρ) a jak vše souvisí s algebraickým řešením úlohy.
Tato opora obsahuje jen základní konstrukce, není v ní prostor pro diskusi o podmínkách počtu řešení v konstrukčních úlohách s parametry. Máte-li zájem o tuto problematiku, doporučuji vám spoustu zajímavých úloh ve sbírce [4], kapitoly 7. 2 a 7. 3.

3 Konstrukce čtyřúhelníků

V této kapitole se dozvíte: *jak se efektivně využívají jednotlivé zadávající prvky čtyřúhelníka, jak ke konstrukcím využívat poznatky z předchozí látky – tj. z konstrukcí trojúhelníků*

V této kapitole se naučíte: *prakticky provést rozbor úlohy; postupovat efektivně při „objevování" řešení, zapsat postup řešení a zjistit jejich počet; provést konstrukci a zkoušku.*

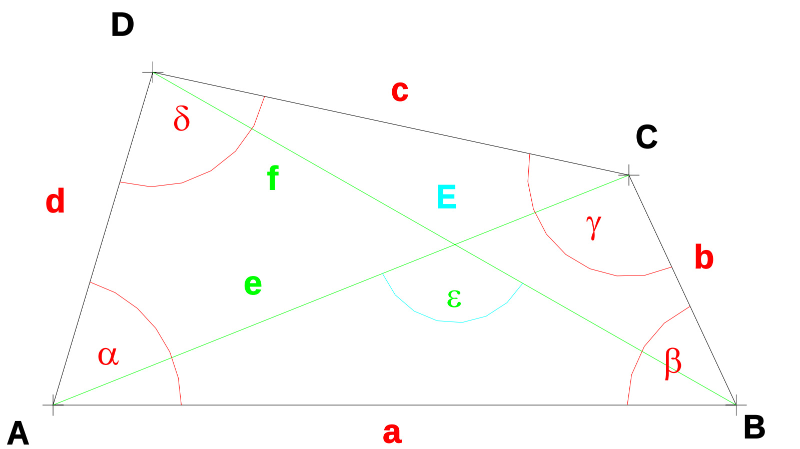


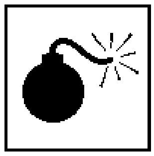
Klíčová slova kapitoly: ***viz následující GEOMETRICKÝ SLOVNÍČEK***

Čas potřebný pro prostudování kapitoly: *2 hodiny teorie + 4 hodiny řešení úloh a provedení konstrukcí*

3.1 ***Čtyřúhelník*** – základní pojmy

V celé následující kapitole budu užívat standardní označení prvků čtyřúhelníka podle následujícího obrázku a komentáře:





Strany čtyřúhelníka a jejich velikosti: **a** = |AB|, **b** = |BC|, **c** = |CD|, **d** = |AD|
Úhlopříčky čtyřúhelníka a jejich velikosti: **e** = |AC|, **f** = |BD|
Průsečík úhlopříček: bod **E**; úhel úhlopříček je zadáván jako ∢ AEB ; |∢ AEB| = ε.

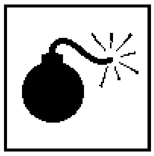
Poznámka 1:
Uvedené standardní označení slouží pouze k praktičtějšímu zadávání úloh. Jinak může být obrazec označen libovolně. Dbejte pouze na jedinou zásadu:

Je-li zadán např. čtyřúhelník **KLMN**, znamená to, že pořadí jeho vrcholů čtených v jednom směru „obíhání“ je **K**,**L**,**M**,**N** (nikoli například **K**,**M**,**L**,**N**).

Poznámka 2:
Budeme se zabývat pouze tzv. **KONVEXNÍMI ČTYŘÚHELNÍKY**, tj. čtyřúhelníky, které mají všechny vnitřní úhly menší než 180°, tedy ostré nebo tupé. (Pojem „konvexní mnohoúhelník“ viz např. [1], str. 42 a 47)

GEOMETRICKÝ SLOVNÍČEK – Čtyřúhelníky

Připomeňte si ještě vymezení některých základních pojmů, týkajících se druhů čtyřúhelníků



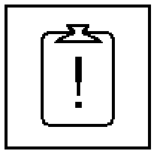
Různoběžník	Čtyřúhelník, jehož žádné dvě strany nejsou rovnoběžné
Lichoběžník	Má jednu dvojici rovnoběžných stran nazývaných základny, zbývající dvě strany se nazývají ramena. Úsečka spojující středy ramen se nazývá střední příčka a je rovnoběžná s jeho základnami. Jeho výška je vzdálenost jeho základen.
Rovnoramenný lichoběžník	Jeho ramena jsou stejně dlouhá, je osově souměrný
Pravoúhlý lichoběžník	Má jedno ze svých ramen kolmé k základnám.
Rovnoběžník	Má protilehlé strany rovnoběžné a shodné, jeho úhlopříčky se půlí.
Pravoúhlý rovnoběžník	U všech vrcholů má pravé úhly, je to tedy obdélník nebo čtverec.
Obdélník	Jeho úhlopříčky se půlí, lze mu opsat kružnici. Má dvě osy souměrnosti.
Čtverec	Jeho úhlopříčky se půlí, jsou kolmé a lze mu opsat i vepsat kružnici. Má čtyři osy souměrnosti.
Kosočtverec	Má všechny strany stejně dlouhé, jeho úhlopříčky jsou kolmé, půlí se a půlí jeho vnitřní úhly. Lze mu vepsat kružnici, její poloměr je polovinou výšky kosočtverce. Má dvě osy souměrnosti.
Kosodélník	Rovnoběžník, jehož žádný vnitřní úhel není pravý. Jeho výšky jsou vzdálenosti jeho rovnoběžných stran
Deltoid	Má kolmé úhlopříčky mající různou délku. Má jednu oso souměrnosti
Tětivový čtyřúhelník	Je takový, kterému lze opsat kružnici. Jeho strany jsou tedy tětivami opsané kružnice. Její střed leží na osách stran. Navíc platí: součet dvou protilehlých úhlů je 180°.
Tečnový čtyřúhelník	Je takový, kterému lze vepsat kružnici. Jeho strany jsou tedy tečnami vepsané kružnice. Její střed leží na osách úhlů. Navíc platí: $a+c = b+d$
Dvojstředový čtyřúhelník	Je takový, který je současně tečnový i tětivový. Středy opsané a vepsané kružnice jsou obecně různé.

Obsáhlejší informace o čtyřúhelnících, příp. důkazy některých uvedených vztahů můžete vyhledat v [1], str. 47 – 51.

3.2 Konstrukce čtyřúhelníků

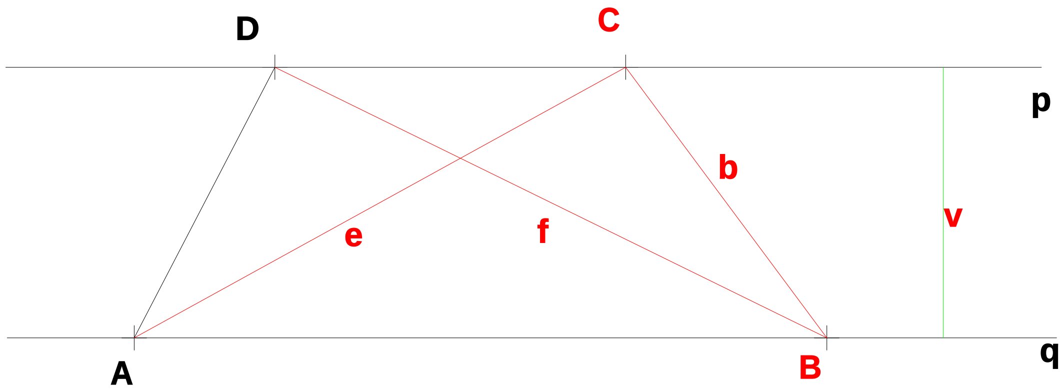
Dílčí úlohou při konstrukčních úlohách o čtyřúhelnících velice často bývá sestrojení některého z trojúhelníků, na které je čtyřúhelník rozdělen svými úhlopříčkami. S úspěchem tedy můžete využít poznatky z předchozí kapitoly.

Příklad 9:



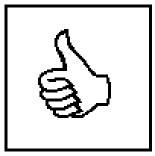
Sestrojte lichoběžník **ABCD, AB||CD**, je-li dáno: **b = 5 cm, v = 4 cm, e = 6,5 cm, f = 6 cm**, kde **v** je výška lichoběžníka.

Řešení:
Zadaná úloha je nepolohová. Provedu rozbor úlohy, v náčrtku vyznačím červeně zadávající prvky:



Začnu konstrukcí trojúhelníka **ABC**, který umístím do pásu rovnoběžek **p,q**, jehož šířka je současně výškou trojúhelníka. Na **p** zvolím bod **C** a pomocí kružnic se středem **C** sestrojím trojúhelník **ABC.** Bod **D** na **p** vymezím kružnicí se středem v bodě **B.**

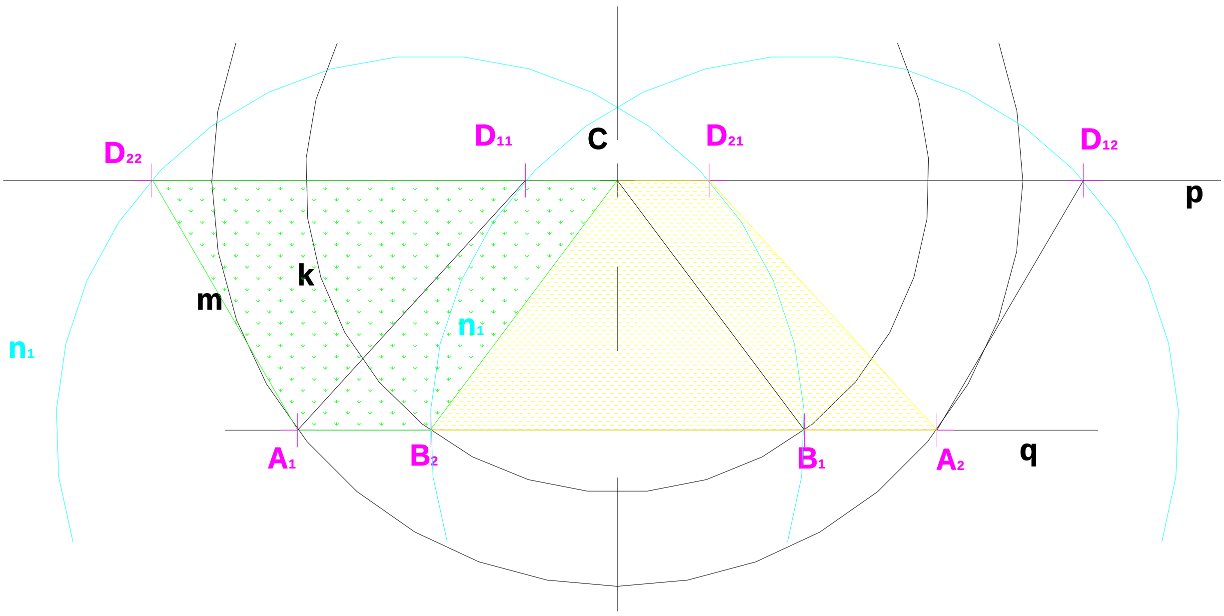
Doporučuji, abyste konstrukci prováděli na papír sami, a do této opory nahlédli až kvůli kontrole správnosti řešení. Dávejte pozor na to, abyste vybrali lichoběžníky, které jsou řešením této úlohy – a to jsou ty, u kterých je pořadí vrcholů čtených po obvodu ABCD – nikoli ABDC !



Postup konstrukce:

1. $p,q;\ p\|q \wedge |pq| = v = 4\,cm$
2. $C;\ C \in p$
3. $k;\ k(C, b = 5\,cm)$
4. $B;\ B \in k \cap q$
5. $m;\ m(C, e = 6{,}5\,cm)$
6. $A;\ A \in m \cap q$
7. $n;\ n(B, f = 6\,cm)$
8. $D;\ D \in n \cap p$
9. lichobĺgn²k ABCD

Konstrukce:



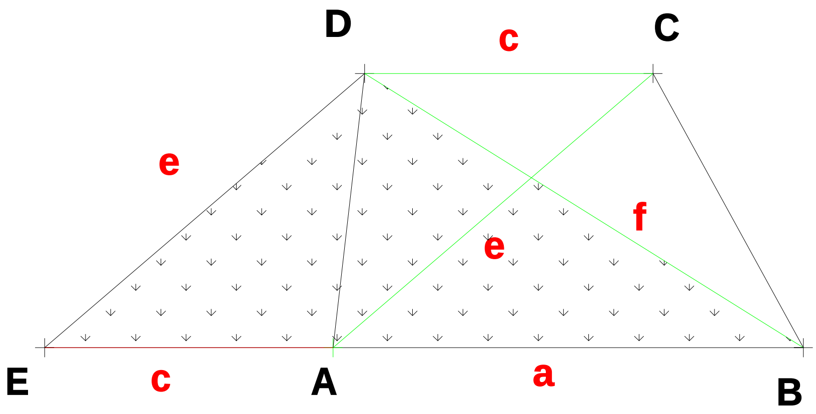
Počet řešení:
Podle uvedeného postupu sestrojím celkem čtyři lichoběžníky splňující podmínky ze zadání. Ve výše uvedené konstrukci jsou kvůli přehlednosti sestrojeny dva z nich, zbylé dva jsou s nimi osově souměrné podle osy procházející bodem **C** kolmo k rovnoběžkám **p,q**. Chybějící lichoběžníky jsou ovšem shodné s těmi, které jsou vykresleny. Úloha má tedy celkem **dvě tvarově odlišná řešení.**

Příklad 10:

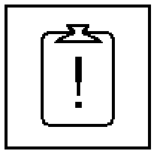
Sestrojte lichoběžník **ABCD, AB**||**CD**, je-li dáno: **a = 5 cm, c = 3 cm, e = 6 cm, f = 4 cm.**

Rozbor - náznak řešení:
Zadaná úloha je nepolohová. Provedu rozbor úlohy, v náčrtku vyznačím zadávající prvky. Následují náčrtek by vás měl přivést k nápadu jak si s konstrukcí poradit. Trik spočívající v přesunutí jedné úhlopříčky lichoběžníka ($AC \rightarrow ED$) si zapamatujte – u konstrukce lichoběžníka, posléze i v početních úlohách o lichoběžníku, se často vyskytuje! Pak již budete jistě schopni úlohu dořešit sami (lze to více způsoby). Pokud se vám to nepodaří, podívejte se do řešení (je na str. 43)

Náčrtek:

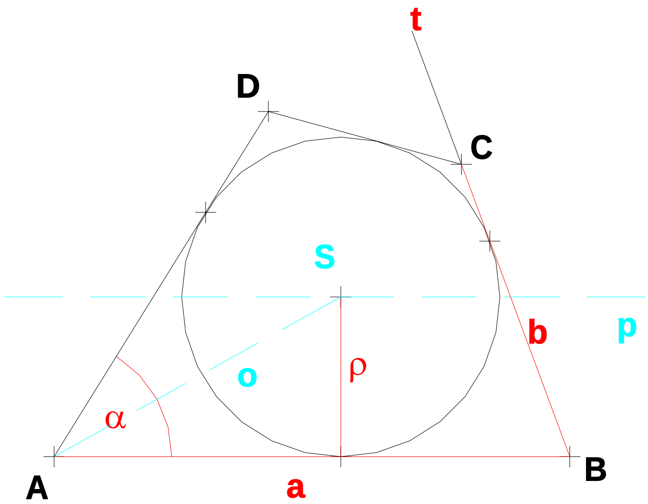


Příklad 11:



Sestrojte tečnový čtyřúhelník **ABCD**, je-li dáno: **a = 6 cm, b = 4 cm, ρ = 2 cm, α = 60°** (ρ je poloměr kružnice vepsané).

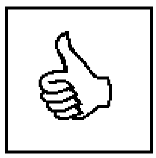
Rozbor:



Úloha je nepolohová, mohu si zvolit čím začít. Nejlépe bude vyjít od úhlu α, na jehož jedno rameno umístím stranu **a**. O středu **S** kružnice vepsané vím, že leží na ose úhlu a současně na rovnoběžce s **AB** ve vzdálenosti ρ od **AB**. Pak už mohu sestrojit vepsanou kružnici. Strana **b** pak leží na její tečně vedené z bodu **B.** Tak získám bod **C** a z něj opět vedu tečnu ke kružnici a v průsečíku s ramenem úhlu α sestrojím zbývající bod **D**.

Postup:

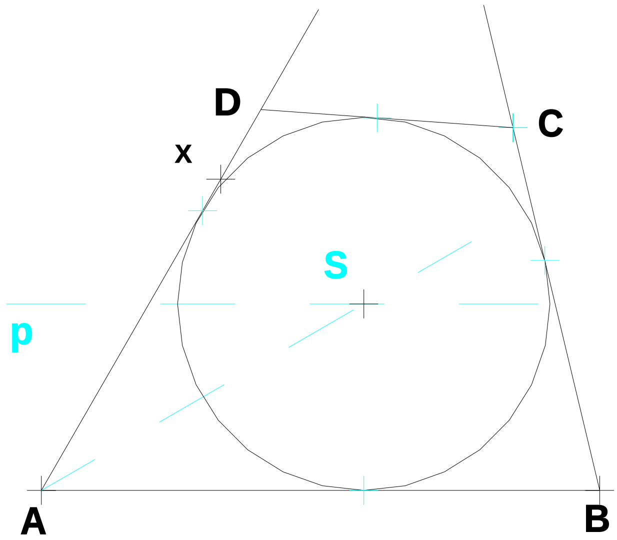
- pokuste se jej podle rozboru zapsat sami. Nezapomeňte použít pomocný bod pro zápis konstrukce ramen úhlu o velikosti α. **Jak** se sestrojí tečna z bodu ke kružnici se do postupu nezapisuje, pouze do něj uvedete, **že** se tato tečna sestrojí – patří to totiž mezi základní konstrukce (užijete Thaletovu kružnici nad BS, resp. nad CS). Zápis si můžete zkontrolovat na následující stránce.



Postup:

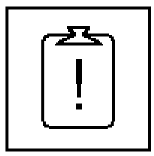
1. $AB;\ |AB| = a = 6\,cm$
2. $\overrightarrow{AX};\ |\angle BAX| = \alpha = 60°$
3. $p;\ p \parallel AB \wedge |p, AB| = \rho = 2\,cm$
4. *o; o je osa úhlu BAX*
5. *S;* $S \in p \cap o$
6. *k; k(S,* ρ *=2 cm)*
7. *t; t je tečna z B ke k*
8. *m;* $m(B, b = 4\,cm)$
9. $C;\ C \in m \cap t$
10. *n; n je tečna z C ke k*
11. *D;* $D \in n \cap \overrightarrow{AX}$
12. *čtyřúhelník ABCD*

Konstrukce:



Počet řešení:
Další čtyřúhelník by vznikl v opačné polorovině s hraniční přímkou **AB** – byl by ovšem shodný s tímto vykresleným. Protože řešíme nepolohovou úlohu, má jedno řešení. (a nezapomeňte……… ***ZK.***√)

Příklad 12:
Sestrojte dvojstředový čtyřúhelník **ABCD**, je-li dáno: α **= 60°,** β **= 80°,** ρ **= 2,5 cm**. (ρ je poloměr kružnice vepsané).

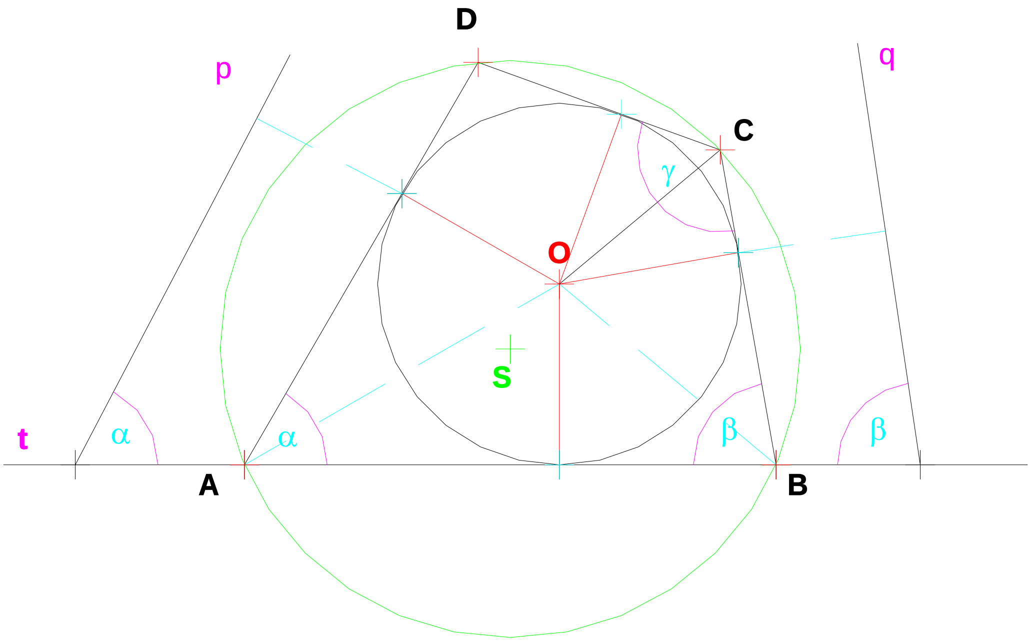


Rozbor:

Uvědomte si souvislosti mezi prvky dvojstředového čtyřúhelníka, tj. čtyřúhelníka, kterému lze opsat i vepsat kružnici. Znáte-li dva jeho sousední úhly, znáte i zbývající dva, protože protilehlé úhly čtyřúhelníka, kterému lze opsat kružnici, se doplňují do 180°. Pro konstrukci lze využít tedy např. úhel γ **= 180°-** α **= 120°**.
Je možné postupovat například takto: Sestrojím vepsanou kružnici **k(O;**$\rho = $ **2,5 cm)** a sestrojím některou její tečnu **t.** Dále sestrojím přímky **p** a **q**, které

s přímkou **t** svírají po řadě úhly α a β. Ze středu **O** vedu k přímkám **p,q** kolmice a po nich posunu přímky tak, až se dotknou vepsané kružnice. Takto vzniknou body **A** a **B**.
Při konstrukci bodu **C** použiji informaci o velikosti úhlu γ. Snadno dopočítám, že odklon úsečky **OC** od poloměru kolmého k přímce **q** je **30°**. A takto jej také sestrojím. Zbývá bod **D.** Leží na kružnici opsané trojúhelníku **ABC**, která je zde totožná s kružnicí opsanou čtyřúhelníku **ABCD**. Bod **D** pak naleznu v průniku této kružnice s ramenem úhlu α.

Náčrtek:

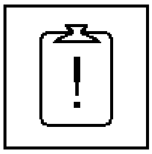


Postup:

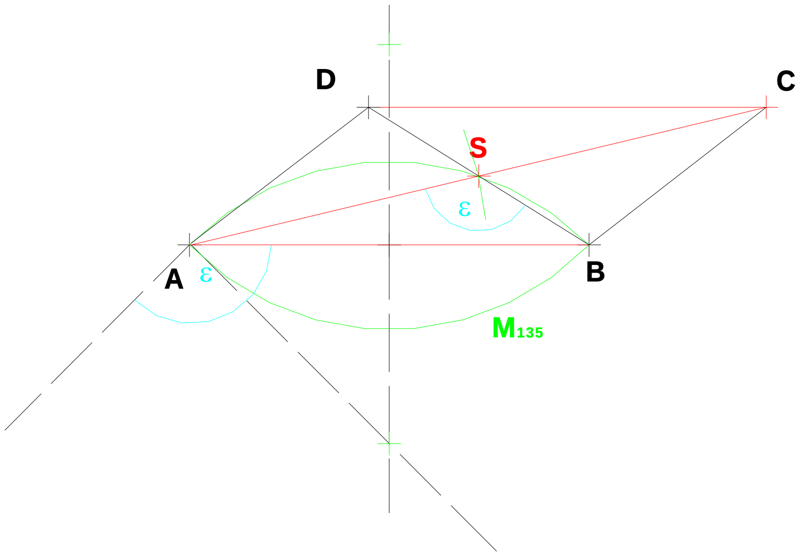
1. $k;\ k(O, \rho = 2{,}5\,cm)$
2. t; t je lib. Tečna k
3. p; $|\angle pt| = \alpha = 60°$
4. q; $|\angle qt| = \beta = 80°$
5. p´; p´// p, p´je tečna k
6. q´; q´// q, q´je tečna k
7. m; $m \perp q \wedge O \in m$
8. T; $T \in m \cap q'$
9. $\overrightarrow{OX};\ |\angle TOX| = \frac{180° - \gamma}{2}$
10. C; $C \in q' \cap \overrightarrow{OX}$
11. o; o je kruž. opsaná ΔABC
12. n; n je tečna z C ke k
13. D; $D \in m \cap n$
14. čtyřúhelník ABCD

Konstrukci jistě podle náčrtku a postupu zvládnete sami. Doporučuji, abyste ji nevynechávali, je v ní obsažena spousta poznatků o čtyřúhelníku, trojúhelníku, obvodových a středových úhlech. Držte se postupu a u každého kroku si zdůvodňujte, podle které zákonitosti jej provádíte. Podle potřeby se vraťte ke kapitole o obvodových úhlech, resp. ke geometrickému slovníčku v úvodu třetí kapitoly.

Příklad 13:
Je dána úsečka **AB,** $|AB|$ **= a = 5 cm**. Sestrojte rovnoběžník **ABCD**, víte-li, že: **e = 7 cm,** ε **= 135°.** (ε je velikost úhlu ASB, kde S je průsečík úhlopříček)



Náčrtek:



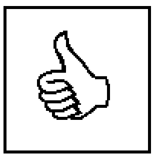
Rozbor:
Střed **S** leží v množině bodů, z nichž vidíme úsečku **AB** pod úhlem **135°** a též leží na kružnici se středem v bodě **A** a poloměrem rovným polovině **e.** Zbytek doplním užitím středové souměrnosti nebo využitím rovnoběžnosti stran. Konstrukce je patrná z obrázku, uvádím proto pouze její postup.

Postup:

1. $AB;\ |AB| = a = 5\,cm$
2. $M_{135};\ M_{135} = \{X;\ |\angle AXB| = \varepsilon = 135°\}$
3. $k;\ k(A, \frac{1}{2}e)$
4. $S;\ S \in k \cap M_{135}$
5. *rovnoběžník ABCD*

Počet řešení:
Úloha je polohová, má dvě řešení.

K procvičení tématiky podkapitoly 3.1 vám předkládám k samostatné práci několik úloh. Jejich řešení – tj. postupy konstrukcí - naleznete v následujícím kapitole Řešení úloh. Využijte výhodně hypertextové odkazy.



Úloha 9:
Sestrojte kosočtverec **ABCD,** je-li dáno: **e = 8 cm,** ρ **= 1,5 cm**.
(ρ je poloměr kružnice vepsané).

(Řešení viz str. 43)

Úloha 10:
Sestrojte tečnový čtyřúhelník **ABCD**, je-li dáno: **a = 6 cm, b = 3 cm**, **c = 4 cm**, α = **60°**.

(Řešení viz str. 43)

Úloha 11:
Sestrojte lichoběžník **ABCD, AB**$\parallel$**CD**, je-li dáno: **a = 7 cm, b = 5 cm**, **d = 4 cm,** α **= 60°.**

(Řešení viz str. 43)

Úloha 12:
Sestrojte obecný konvexní čtyřúhelník **ABCD**, je-li dáno: **a = 7,5 cm**, **b = 5 cm, e = 6 cm, f = 8 cm,** ε = **120°.**

(Řešení viz str. 44)

3.3 Řešení úloh

Řešení příkladu 10 - dokončení: (ze strany 38)
Nejprve sestrojte trojúhelník **EBD** ($|$**EB**$|$= 8 cm, $|$**BD**$|$= 4 cm, $|$**ED**$|$= 6 cm). Pak na **EB** sestrojte bod **A** tak, aby $|$**EA**$|$= 3 cm. Bodem **D** veďte rovnoběžku s **EB**. Na ní leží hledaný bod **C** - bude průsečíkem této přímky s kružnicí se středem v bodě **A** a poloměrem **e** = 6 cm. Vyznačte výsledný lichoběžník **ABCD**. (pozor ! – ne **ABDC** !) Úloha je nepolohová, má jediné řešení.

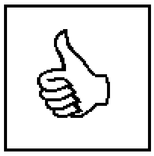
Řešení úlohy 9: (ze strany 43)
Umístěte úsečku **AC**, $|$**AC**$|$**= 8 cm** a vyznačte její střed **S**. Dále sestrojte vepsanou kružnici **k**(**S**, ρ = **1,5 cm)**. Body **B** a **D** jsou průsečíky tečen vedených ke kružnici **k** z bodů **A** a **C**. Při konstrukci nezapomeňte vyznačit dotykové body na stranách kosočtverce. Úloha je nepolohová, má jediné řešení.

Řešení úlohy 10: (ze strany 43)
Hledaný čtyřúhelník je tečnový. V takovémto případě – známe-li tři jeho strany, známe i čtvrtou! Platí: **a**+**c** = **b**+**d**, takže ze zadání a této rovnosti plyne, že **d = 7 cm**. Pak již je konstrukce velice snadná. Nejprve sestrojte trojúhelník **BAD** a pak nad stranou **BD** sestrojte trojúhelník **BCD**. Úloha je nepolohová, má jediné řešení.

Řešení úlohy 11: (ze strany 43)
Podle zadání sestrojte trojúhelník **ABD**. Pak bodem **D** veďte rovnoběžku se stranou **AB**, kterou protněte kružnicí se středem v bodě **B** a poloměrem **b = 5 cm**. Dostanete tak bod **C**. Úloha je nepolohová, má dvě tvarově odlišná řešení.

Řešení úlohy 12: (ze strany 43)
Podle zadání sestrojte trojúhelník **ABC**. Průsečík úhlopříček (bod **E**) má tu vlastnost, že je z něj vidět úsečku **AB** pod úhlem ε **= 120°.** Sestrojte tedy množinu bodů $\mathbf{M_{120}}$ nad **AB**. Tam, kde kruhové oblouky protnou úsečku **BD**, leží bod **E**. Na polopřímce **BD** pak ve vzdálenosti f = 8 cm od bodu **B** leží bod **D**. Úloha je nepolohová, má jediné řešení.

3.4 Rady na závěr



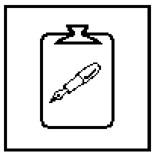
Budete- li mít zadanou konstruktivní úlohu o čtyřúhelníku, vždy si nejdříve dobře uvědomte, jaké vlastnosti se skrývají pod jeho pojmenováním. Dále zkoumejte, zda při vyznačení zadávajících prvků v rozboru je „uzavřen“ – tj. plně určen - některý z trojúhelníků, na které lze čtyřúhelník rozdělit. Pokud ano, začněte od tohoto trojúhelníka.
Vznikne-li více řešení, uvědomte si, že akceptovat můžete jen ta, kde pořadí vrcholů čtených v určitém směru odpovídá zadání. Pokud byste si to neuvědomili, měla by nesrovnalosti odhalit zkouška.
Pro vaše samostudium vám opět nabízím další úlohy. Najdete je v následujících titulech:

[1]: str. 109, úlohy 2.29 – 2.33
[2]: str. 78, úlohy 22 – 24.

4 Konstrukce kružnic

<u>V této kapitole se dozvíte</u>: *jak se hledají a využívají množiny středů kružnic požadovaných vlastností, jak se tyto množiny využívají v konstruktivních úlohách o kružnicích.*

<u>V této kapitole se naučíte</u>: *řešit vybrané konstruktivní úlohy o kružnicích.*



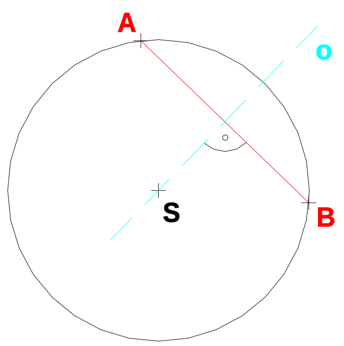
<u>Klíčová slova kapitoly</u>: tětiva, tečna, vnější dotyk kružnic, vnitřní dotyk kružnic, mezikruží, osa mezikruží

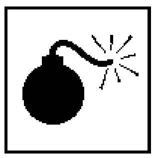
<u>Čas potřebný pro prostudování kapitoly</u>: *2 hodiny teorie + 4 hodiny řešení příkladů*

*4.1 **Kružnice – základní pojmy***

Pojmy, které se vážou ke kružnicím, jsou všeobecně známé. Zaměřím se spíše na popis jejich vlastností a hledání souvislostí. K tomuto účelu nejlépe poslouží série obrázků s krátkými komentáři:

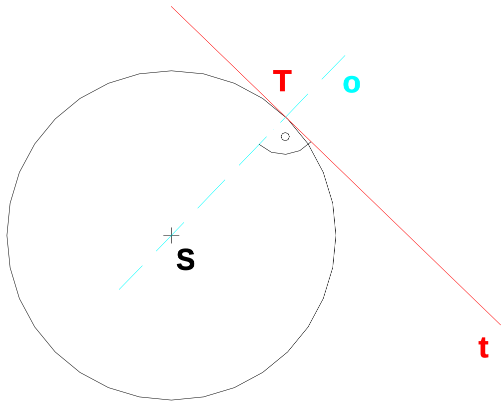
Tětiva kružnice:
- je úsečka spojující dva body ležící na kružnici
- osa tětivy prochází středem kružnice





Tečna kružnice:

- je přímka obsahující jediný bod kružnice, všechny ostatní její body jsou vnější
- je kolmá k poloměru v bodu dotyku



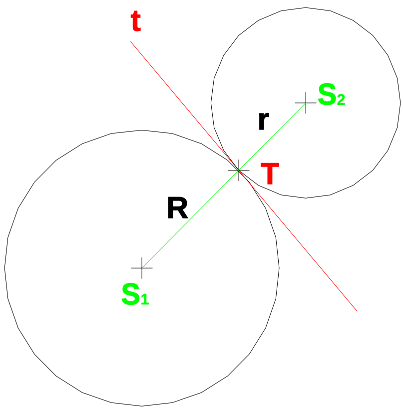
Vnější dotyk kružnic:

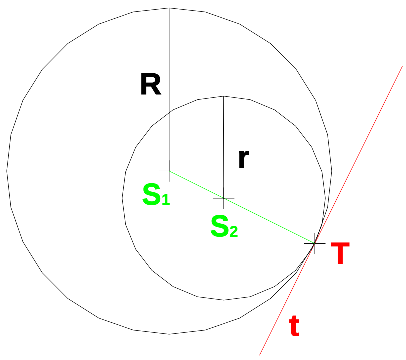
platí: $|S_1S_2| = R + r$

Vnitřní dotyk kružnic:

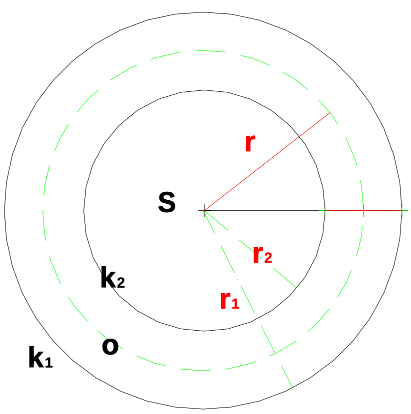
platí: $|S_1S_2| = R - r$

- bod dotyku leží na spojnici středů
- kružnice mají v tomto bodě společnou tečnu





Mezikruží, osa mezikruží:



- šířka mezikruží je $\mathbf{r_1 - r_2}$
- poloměr osy mezikruží:

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

- osa mezikruží je množinou středů kružnic, které mají s kružnicí k_1 vnitřní dotyk a s kružnicí k_2 vnější dotyk

- $k_1 \cup k_2$ lze považovat za ekvidistantu kružnice **o** – tj. za množinu bodů majících od **o** jistou konstantní vzdálenost (zde $\mathbf{r_1 - r_2}$).

4.2 Množiny středů kružnic daných vlastností

K řešení konstruktivních úloh o kružnicích potřebujete obdobně jako při jiných konstrukcích základní stavební kamínky. V tomto případě to budou právě množiny středů kružnic splňujících určitou vlastnost. Seznámíte se s nimi formou jednoduchých příkladů.

Doporučuji následující postup: přečtěte si zadání, pak se sami pokuste o náčrtek řešení, vzniklý útvar pojmenujte. Pak se teprve podívejte dále. Odpovědi následují bezprostředně po úloze.

1. Co je množinou středů všech kružnic procházejících daným bodem **S** a majících poloměr 2 cm?
(Kružnice se středem **S** a poloměrem 2 cm.)

2. Co je množinou středů všech kružnic, které mají poloměr 2 cm a dotýkají se dané přímky **p**?
(Dvojice rovnoběžek s danou přímkou ve vzdálenosti 2 cm od **p**)

3. Co je množinou středů všech kružnic, které se dotýkají dvojice rovnoběžek? (osa pásu)

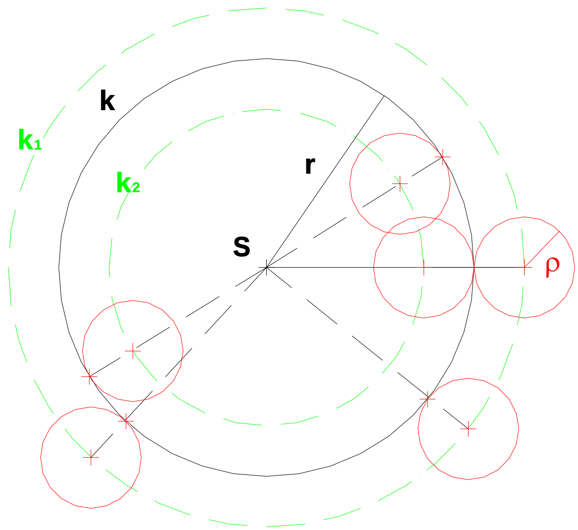
4. Co je množinou středů všech kružnic, které se dotýkají dvojice různoběžek? (dvojice os úhlů – jsou vzájemně kolmé)

5. Co je množinou středů všech kružnic, které procházejí dvěma danými různými body **A**, **B** ? (osa úsečky **AB**)

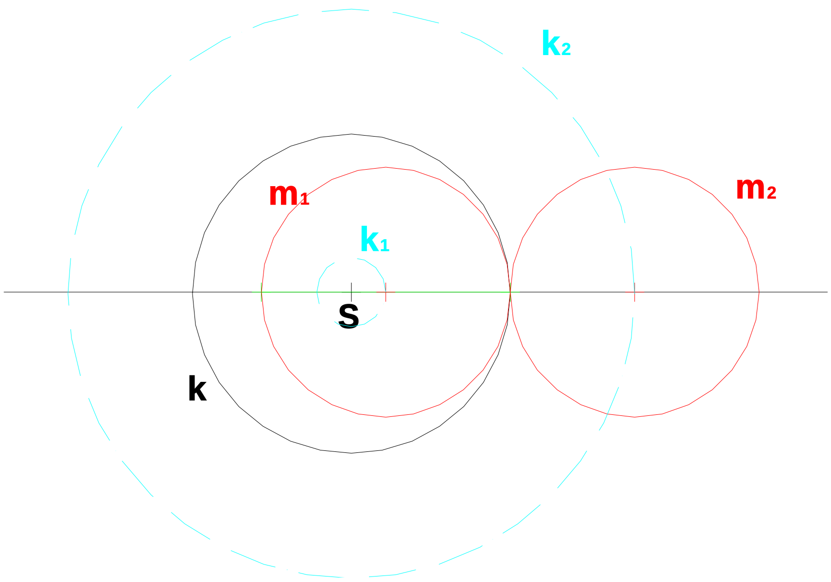
S dalšími - složitějšími množinami vás seznámím formou řešených příkladů:

Příklad 13:
Je dána kružnice **k**(**S**, **r**). Co je množinou středů všech kružnic, které se dotýkají dané kružnice a mají poloměr ρ < **r** ?

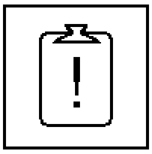
Rozbor a náčrtek:
Je to dvojice soustředných kružnic, které mají střed **S**, menší má poloměr **r - ρ,** větší má poloměr **r + ρ.** Několik kružnic, jejichž středy jsou řešením, je sestrojeno červeně.



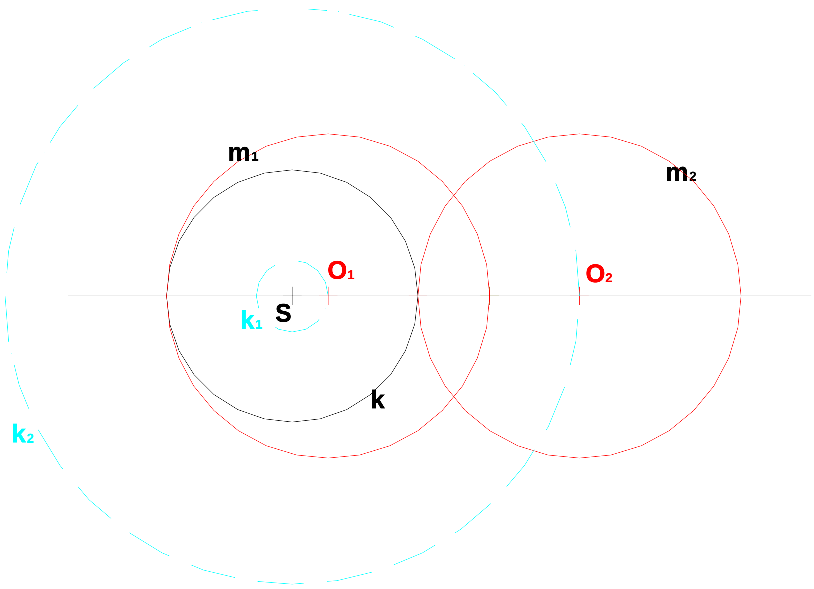
Konstrukci si vyzkoušejte pro konkrétní hodnoty – např. pro danou kružnici **k(S, 5 cm)** a sestrojte množinu středů kružnic dotýkajících se kružnice **k** a majících poloměr **2 cm**.
Konstrukci si dále vyzkoušejte pro **k(S, 5 cm)** , ale hledejte středy dotýkajících se kružnic, které mají poloměr **3 cm.** K nalezení poloměrů množiny středů hledaných kružnic s vnitřním dotykem sestrojte nejprve jednu z nich **(m_1)** a určete její střed. Ostatní středy již budou ležet na soustředné kružnici. Totéž proveďte pro kružnice s vnějším dotykem (např. **m_2**) se zadanou kružnicí. Veškeré postupy, zejména vztahy pro velikosti poloměrů, zůstávají zachovány. Řídit se můžete např. následujícím náčrtkem:



Příklad 14:
Je dána kružnice **k(S, r).** Co je množinou středů všech kružnic, které se dotýkají dané kružnice a mají poloměr ρ **>** **r** ?

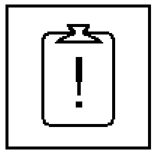


Rozbor a náčrtek:
Hledané kružnice jsou nyní větší než zadaná kružnice **k**, budou ji tedy obsahovat uvnitř (jako **m_1**) nebo se jí dotýkat zevně (jako **m_2**). Poloha jejich středů vymezí poloměr hledané soustředné kružnice. Řešením jsou tedy body množiny $k_1 \cup k_2$. Ověřte si, že poloměry výsledných kružnic jsou: u **k_1**…$\rho - r$, u **k_2**…$\rho + r$.



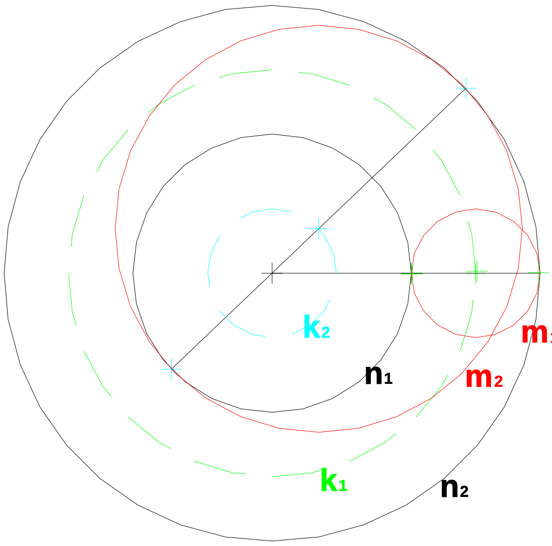
Konstrukce:
Konstrukci proveďte sami, zvolte například **r = 2 cm, ρ = 3 cm.**

Příklad 15:
Jsou dány dvě soustředné kružnice s poloměry $\mathbf{r_1 = 3}$ **cm**, $\mathbf{r_2 = 5}$ **cm**. Sestrojte množinu středů všech kružnic, které se dotýkají obou kružnic mezikruží.



Rozbor a náčrtek:
Zadány jsou kružnice $\mathbf{n_1}$ a $\mathbf{n_2}$. Červeně jsou sestrojené příklady kružnic, jejichž středy hledám. Poloha jejich středů určí poloměry výsledných kružnic, tj. kružnic $\mathbf{k_1}$ a $\mathbf{k_2}$.

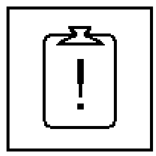
Konstrukce už pak není náročná. Je ji ale třeba bezpečně ovládat, protože se používá k řešení mnoha konstruktivních úloh o kružnicích.



4.3 Konstrukce kružnic

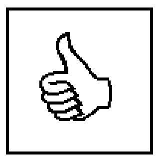
V konstruktivních úlohách o kružnicích se hledají vesměs kružnice splňující požadavky typu: **procházet daným bodem (B), dotýkat se dané přímky (p), dotýkat se dané kružnice (k).** Různými výběry trojice těchto požadavků vznikne celkem 10 tzv. Apollóniových úloh. Např. zkratka *ppk* znamená pokyn hledat kružnici, která se dotýká dvou daných přímek a jedné dané kružnice. V rámci středoškolské planimetrie se budeme zabývat jen některými z nich. Zájemci mohou podrobnosti a odkazy k těmto úlohám nalézt například v [1] na str. 113.

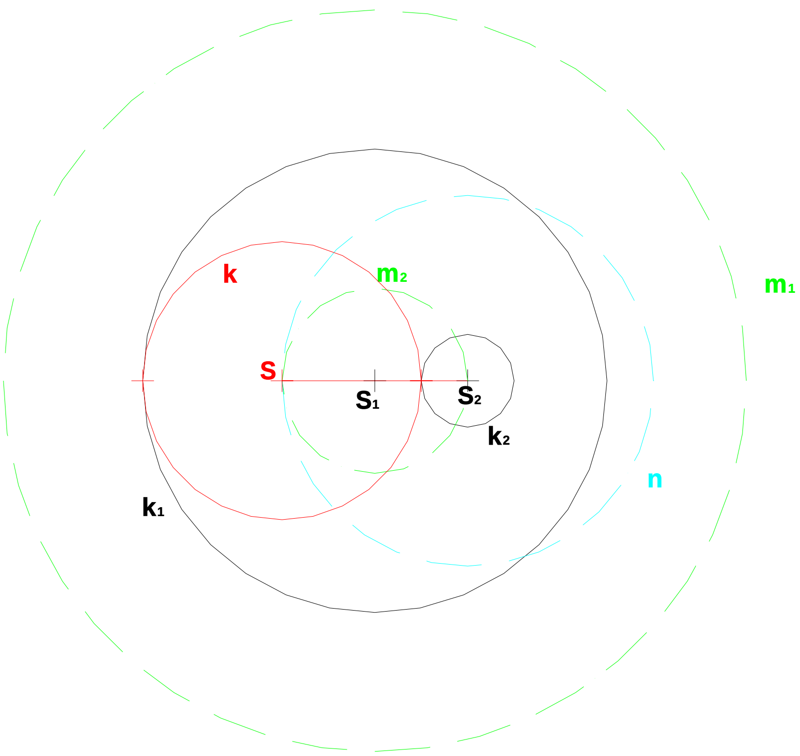
Příklad 16:
Jsou dány kružnice $\mathbf{k_1(S_1,}$ **5 cm)**, $\mathbf{k_2(S_2,}$ **1 cm)**, $\mathbf{|S_1S_2| = 2}$ **cm**. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají daných kružnic a mají poloměr 3cm.



Rozbor a náčrtek:

Náčrtek je v případě kružnic lepší nečrtat od ruky, ale přece jen použít kružítko. Jsou-li v úloze konkrétní rozměry, je lepší je použít i v náčrtku, alespoň proporcionálně, protože poskytnou vizuální informaci o vzájemné poloze zadaných kružnic. Výslednou kružnici pak umístíte do náčrtku jen od ruky, ale budete mít o ní lepší představu. Pak máte vše připraveno k úvaze o tom, kde leží střed hledané kružnice. Je to bod – takže jej hledáme opět jako průsečík dvou čar. Dalším atributem, který musíme určit, je poloměr. Ten je roven většinou vzdáleností mezi sestrojeným středem a dotykovým bodem na zadaném objektu.

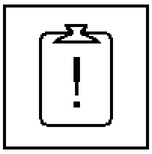




Řešení lze „poskládat" z množin středů kružnic. Zaměřím se na každou kružnici ze zadání zvlášť. Množina středů kružnic, které se dotýkají $\mathbf{k_1}$ a mají poloměr 3 cm, je vyznačená zeleně a skládá se z kružnice $\mathbf{m_1(S_1,\ 8\ cm)}$ - pro vnější dotyk a z kružnice $\mathbf{m_2(S_2,\ 2\ cm)}$ - pro vnitřní dotyk, značím ji $m_1 \cup m_2$. Množina středů kružnic, které se dotýkají $\mathbf{k_2}$ a mají poloměr 3 cm, je vyznačena modře a je tvořena jedinou kružnicí $\mathbf{n(S_2,\ 4\ cm)}$.
Středy hledaných kružnic jsou body průniku těchto dvou množin. (Můžete se orientovat podle barev – hledejte průnik mezi zelenou a modrou.) Takový bod je v této úloze jediný – bod **S.** Dotykové body hledané kružnice leží na spojnici středů $\mathbf{SS_1}$, $\mathbf{SS_2}$. Úloha má jediné řešení (vyznačené červeně). Konstrukce v podstatě kopíruje náčrtek – proveďte si ji sami.

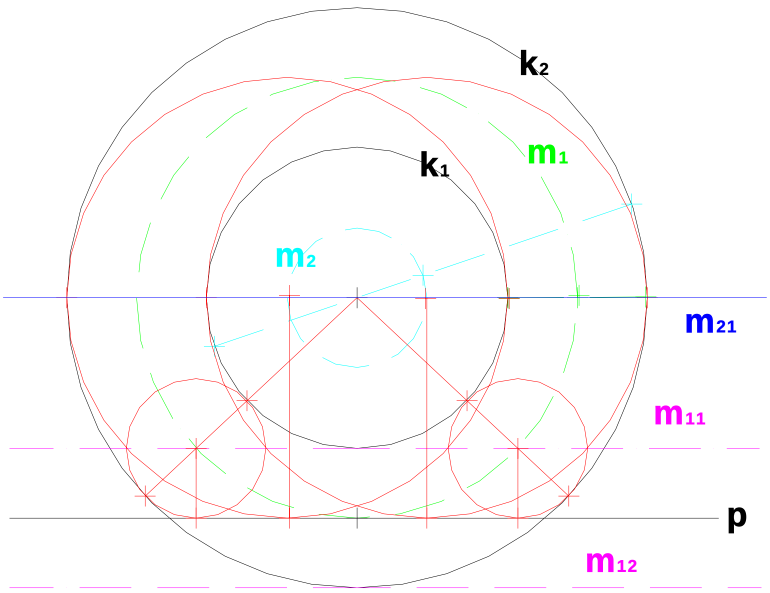
Příklad 17:

Jsou dány soustředné kružnice $\mathbf{k_1(S;\ 4\ cm)}$, $\mathbf{k_2(S;\ 2\ cm)}$ a přímka **p,** jejíž vzdálenost od středu kružnic je **d = 3 cm**. Sestrojte všechny kružnice, které se současně dotýkají obou kružnic i dané přímky.



Rozbor a náčrtek:

Nejprve budu hledat množinu středů kružnic, které se dotýkají $\mathbf{k_1}$ a $\mathbf{k_2}$. Tuto množinu tvoří dvě kružnice – jedna je množinou středů kružnic dotýkajících se menší kružnice z vnějšku $\mathbf{(m_1)}$, druhá je pro vnitřní dotyk $\mathbf{(m_2)}$. Větší zadané kružnice se hledané řešené může dotýkat jen zevnitř. Pokud si praktické provedení této části konstrukce potřebujete připomenout, vraťte se k příkladu č. 15.



Nyní znám poloměry kružnic. Připojím další podmínku: hledané kružnice se mají dotýkat dané přímky **p**. Množinou středů kružnic je ekvidistanta přímky **p**, tj. dvojice rovnoběžek s přímkou **p** vzdálených od ní o velikost poloměru získaného v první části konstrukce. Ekvidistanty jsou dvojí velikosti – podle poloměrů příslušejících vnitřnímu ($m_{21} \cup m_{22}$), resp. vnějšímu dotyku ($m_{11} \cup m_{12}$) s menší ze zadaných kružnic. Přímka m_{22} nedává žádné řešení, v náčrtku není zakreslena.

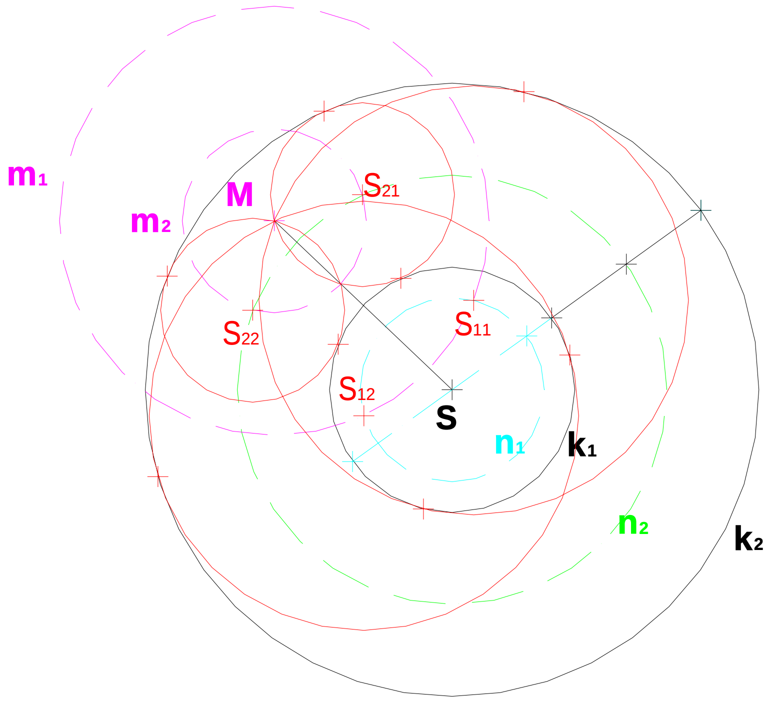
Středy hledaných kružnic jsou v průniku uvedených množin bodů. Jsou to: $m_1 \cap (m_{11} \cap m_{12})$ pro vnější dotyk – vzniknou středy dvou menších červeně sestrojených kružnic; dále $m_2 \cap (m_{21} \cap m_{22})$ pro vnitřní dotyk – vzniknou středy dvou větších červeně sestrojených kružnic. Úloha má tedy 4 řešení. Konstrukci nyní jistě snadno provedete sami.

Příklad 18:

Jsou dány soustředné kružnice **k₁(S; 5 cm)**, **k₂(S; 2 cm)** a bod **M** takový, že **|SM| = 4 cm**. Sestrojte všechny kružnice, které se současně dotýkají obou kružnic a procházejí daným bodem.

Rozbor a náčrtek:

Podle příkladu 15 sestrojíme kružnice **n_1, n_2** – množiny středů kružnic dotýkajících se daných kružnic **k_1, k_2**. Průsečíky osy mezikruží **n_2** s kružnicí **m_2**, která má střed v bodě **M** a poloměr rovný šířce mezikruží, jsou právě středy dvou hledaných menších kružnic – jsou sestrojeny červeně. Větší hledané kružnice mají své středy jednak na kružnici **n_1** a jednak na kružnici **m_1**, která má střed v bodě **M** a poloměr rovný šířce mezikruží vymezeného kružnicemi **n_1** a **k_2**.

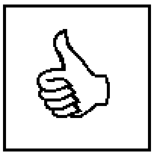


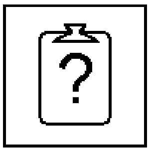
Postup konstrukce:

1. n_1; $n_1(S;\ 1{,}5\ cm)$
2. n_2; $n_2(S;\ 3{,}5\ cm)$
3. m_1; $m_1(M;\ 3{,}5\ cm)$
4. m_2; $m_2(M;\ 1{,}5\ cm)$
5. S_1; $S_1 \in m_1 \cap n_1$
6. o_1; $o_1(S_1;\ 3{,}5\ cm)$...*ŘEŠENÍ*
7. S_2; $S_2 \in m_2 \cap n_2$
8. o_2; $o_2(S_2;\ 1{,}5\ cm)$ ...*ŘEŠENÍ*

Konstrukci jistě bez problémů zvládnete sami.
Úloha má celkem 4 řešení. Všechna splňují požadavky ze zadání úlohy.

K procvičení tématiky podkapitoly 4.3 vám předkládám k samostatné práci několik úloh. Jejich řešení naleznete v následujícím kapitole.





Úloha 13:

Je dána kružnice **k(S; 2,5 cm)** a její tečna **t**. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají jak kružnice **k**, tak přímky **t** a mají přitom poloměr **1,5 cm.**

(Řešení viz str. 52)

Úloha 14:

Jsou dány kružnice: **$k_1(S_1;\ 2\ cm)$, $k_2(S_2;\ 4\ cm)$, $|S_1S_2| = 7\ cm$.** Sestrojte všechny kružnice, které mají poloměr **1,5 cm** a dotýkají se daných dvou kružnic.

(Řešení viz str. 52)

Úloha 15:

Jsou dány kružnice: **$k_1(S_1;\ 2\ cm)$, $k_2(S_2;\ 4\ cm)$, $|S_1S_2| = 2\ cm$.** Sestrojte všechny kružnice, které mají poloměr **1,5 cm** a dotýkají se daných dvou kružnic.

(Řešení viz str. 52)

Úloha 16:
Jsou dány soustředné kružnice **k_1(S; 4 cm)**, **k_2(S; 2 cm)** a přímka **p,** jejíž vzdálenost od středu kružnic je **d = 1 cm**. Sestrojte všechny kružnice, které se současně dotýkají obou kružnic i dané přímky.

(Řešení viz str. 52)

Úloha 17:
Jsou dány soustředné kružnice **k_1(S; 4 cm)**, **k_2(S; 2 cm)** a přímka **p,** jejíž vzdálenost od středu kružnic je **d = 2 cm**. Sestrojte všechny kružnice, které se současně dotýkají obou kružnic i dané přímky.

(Řešení viz str. 52)

Úloha 18:
Je dána kružnice **k(S; 5 cm)** a bod **M,** **|SM| = 4 cm.**. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají kružnice **k**, procházejí bodem **M** a mají přitom poloměr **2 cm.**

(Řešení viz str. 53)

4.4 Řešení úloh

Řešení úlohy 13:
Středy hledaných kružnic leží jednak na ekvidistantě tečny sestrojené ve vzdálenosti 1,5 cm, jednak na ekvidistantě kružnice **k**, kterou tvoří dvojice kružnic se středem **S** a poloměry: 2,5 + 1,5 = **4 cm** a 2,5 - 1,5 = **1 cm**. Úloha má čtyři řešení, tři z nich mají s **k** vnější dotyk, jedna vnitřní dotyk.

Řešení úlohy 14:
Poloměry zadaných kružnic je třeba zvětšit o poloměr hledané kružnice – tj. o 1,5 cm. Středy hledaných kružnic pak leží v průniku **m_1(S_1; 3,5 cm)** a **m_2(S_2; 5,5 cm).** Úloha má dvě řešení. Nezapomeňte na konstrukci bodů dotyku – leží na spojnici středů.

Řešení úlohy 15:
Zadání této úlohy je téměř stejné jako v úloze 14. Ale pozor – kružnice mají vnitřní dotyk. Poloměry obou kružnic musíme tedy **zvětšit i zmenšit** o poloměr hledané kružnice, tj. o 1,5 cm. Hledáme tedy vlastně průsečíky ekvidistant kružnic **k_1** a **k_2**, neboli dvou dvojic soustředných kružnic $(m_1 \cup m_2) \cap (n_1 \cup n_2)$, kde m_1**(S_1; 3,5 cm), m_2(S_1; 0,5 cm), n_1(S_2; 2,5 cm), n_2(S_2; 5,5 cm)** Takové průsečíky lze nalézt čtyři, úloha má tedy čtyři řešení. Tři z nich mají přitom vnitřní dotyk s větší kružnicí **k_2,** čtvrtá má s ní vnější dotyk. Nezapomeňte na konstrukci bodů dotyku – leží na spojnici středů.

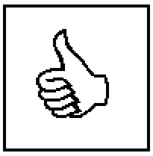
Řešení úlohy 16:
Tuto úlohu můžete řešit podle postupu řešení z příkladu 17 (str. 49). Jen v tomto případě nebude existovat řešení, které by s menší kružnicí mělo vnitřní dotyk. Hledáte tedy průnik osy mezikruží s ekvidistantou přímky sestrojenou ve vzdálenosti rovné polovině šířky mezikruží. Úloha má čtyři řešení.

Řešení úlohy 17:
Tuto úlohu můžete řešit podle postupu řešení z příkladu 17 (str. 49). Nejprve vyhledáte průnik osy mezikruží s ekvidistantou přímky sestrojenou ve vzdálenosti rovné polovině šířky mezikruží – tento případ dává tři řešení se shodnými poloměry. Dále je ještě řešením kružnice, která má vnitřní dotyk

s menší i s větší kružnicí. Dotykový bod je přitom totožný s dotykovým bodem menší kružnice a dané přímky. Pokud toto další (čtvrté) řešení „uvidíte“, nemusíte je hledat pomocí bodových množin. Pokud ne, najdete je aplikováním postupu z řešeného příkladu 17. Úloha má tedy čtyři řešení.

Řešení úlohy 18: (ze strany 52)
Bod **M** leží uvnitř dané kružnice, proto je třeba poloměr této kružnice zmenšit o **2 cm**, tj. o poloměr hledané kružnice. Tak dostaneme jednu množinu středů hledaných kružnic. Druhou množinou bude kružnice se středem **M** a poloměrem **2 cm**. Nezapomeňte nejprve sestrojit dotykové body a pak teprve výsledné kružnice – konstrukce bude přesnější. Úloha má dvě řešení.

4.5 Rady na závěr



V úlohách o kružnicích byly v různých kombinacích využity množiny středů kružnic daných vlastností, zejména ekvidistanty přímky a kružnice. Úlohy řešené na stejném principu lze vyhledat například v následujících odkazech:

[1]: str. 114, úlohy 2.37 – 2.45
[2]: str. 76, úlohy 7 – 13.

Některé další Apollóniovy úlohy vyžadují užití shodných a podobných zobrazení. Můžete je vyhledat v [1]: str. 142, 143, 176,177.
Zopakuji ještě několik dobře míněných rad pro vaši samostatnou práci:

- rozbor u úloh o kružnicích je dobré provádět na náčrtku, jehož podklad (tj. zadání) je vyhotoven s užitím kružítka. Náčrtek hledaného řešení pak už může být „od ruky“. Takovýto náčrtek vás snáze dovede k nalezení použitelných bodových množin obsahujících středy hledaných kružnic.

- nezapomeňte, že kružnice mohou mít dvojí dotyk. Zapomenete-li na to, může vám uniknout část řešení.

- má-li se kružnice dotýkat přímky, může její střed obecně ležet v obou polorovinách – zde by vám opět mohlo uniknout řešení.

- nezapomínejte na konstrukci všech bodů dotyku, které při řešení vznikají. Pokud je pečlivě vyznačíte a teprve pak sestrojíte kružnici, bude vaše konstrukce daleko přesnější.

- úlohy o kružnicích jsou náročné na přesnost, proto nezapomínejte na průběžnou „údržbu“ vašeho kružítka. Tuha by měla být ostře zpilována smirkovým papírem k vnější straně, nejvyšší bod by měl být cca o 1 mm delší než bodec kružítka.

Přeji vám hodně úspěchů při studiu.

RNDr. Eva Davidová,
autorka opory

Literatura

[1] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia. Planimetrie* . Prometheus, spol. s r.o. Praha: 2003. ISBN: 80-7196-174-4

[2] PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy* . Prometheus, spol. s r.o. Praha: 1998. ISBN: 80-7196-099-3

[3] ŠVRČEK, Jaroslav; VANŽURA, Jiří. *Geometrie trojúhelníka* . SNTL. Praha: 1988.

[4] BUŠEK, Ivan a kolektiv. *Sbírka úloh z matematiky pro IV. ročník gymnázií.* SPN Praha: 1991 ISBN: 80-04-23966-8

Poznámky:

Řešení planimetrických konstrukčních úloh

RNDr. Eva Davidová

Ostrava 2005

Název	Řešení planimetrických konstrukčních úloh
Editor	RNDr. Eva Davidová
Vydavatel	Gymnázium, Ostrava–Poruba, Čs. exilu 669
Rozsah	56 stran
Vydání	první, 2005
Tisk	Gymnázium, Ostrava–Poruba, Čs. exilu 669
Doporučená cena	**zdarma**; vytvořeno v rámci projektu SIPVZ 2005

ISBN 80-903647-1-3