Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, příspěvková organizace

STUDIJNÍ OPORA DISTANČNÍHO VZDĚLÁVÁNÍ

ŘEŠENÍ PLANIMETRICKÝCH ÚLOH
- KONSTRUKČNÍ A POČETNÍ ÚLOHY

EVA DAVIDOVÁ

Ostrava 2006

Zpracovala: RNDr. Eva Davidová
Recenzenti: RNDr. Radek Krpec, Ph.D.
Mgr. Libor Koníček, PhD.
RNDr. Jiří Chmela

Publikace byla vytvořena v rámci projektu Státní informační politiky ve školství v roce 2006.

ISBN 80-87058-00-3

Obsah opory

Úvod:

Tato studijní opora distančního vzdělávání navazuje na mou předchozí práci **„Řešení planimetrických konstrukčních úloh“**. Chcete-li s úspěchem prostudovat i toto její pokračování, je nutné si nejprve oživit základní názvy, pojmy i vlastnosti objektů popsané podrobně v prvním díle. Pro začátek postačí si zopakovat základní vědomosti o trojúhelnících, čtyřúhelnících a kružnicích, objektech, které nám i nyní poslouží k aplikaci nových geometrických poznatků a dovedností. Pokud se vám v průběhu studia nové látky stane, že pod některým pojmem nebudete mít dostatečně přesnou představu, postačí si jej vyhledat v prvním díle práce.
V tomto materiálu si nejprve prohloubíte vaše intuitivní chápání **shodnosti a podobnosti rovinných útvarů** a pak se seznámíte s některými geometrickými zobrazeními v rovině. Začneme **základními typy shodných a podobných zobrazení**, poznáme jejich vlastnosti a naučíme se je aktivně používat k zobrazení daného rovinného útvaru. Stěžejní dovedností, ve kterou má pak naše společná snaha vyústit, je **užití jmenovaných zobrazení k řešení konstrukčních úloh**, a to zejména úloh o trojúhelnících, čtyřúhelnících a kružnicích. Důraz budeme klást na rozpoznání vhodnosti užití konkrétního typu shodného nebo podobného zobrazení k řešení předložené konstrukční úlohy a následně k jejímu úspěšnému vyřešení včetně detailního provedení samotné konstrukce.
Mozaiku konstrukčních metod uzavřeme **konstrukcemi řešenými na základě výpočtu**. Naučíte se sestrojovat úsečky, jejichž délkami jsou racionální i iracionální čísla, a úsečky, jejichž délky jsou odvozené z velikosti jiných úseček a úhlů algebraickými vztahy.

Konstrukce, které jsou zde použity, jsou tzv. eukleidovské konstrukce – tj. takové, k nimž postačí pouze pravítko a kružítko.

Kapitoly 2, 3 a 4 obsahují kromě řešených příkladů i **úlohy sloužící k samostatnému procvičení látky.** Upozorňuji zejména na kapitolu **2.8** s názvem **Souhrnné úlohy na užití shodných zobrazení** a kapitolu **3.2 Užití stejnolehlosti k řešení konstrukčních úloh***.* Použila jsem vesměs systém nejprve nápovědy s částečným řešením a pak teprve úplného řešení s komentářem. Cestu tam i zpět provázejí tam, kde jsou nápověda a řešení na více stranách, **hypertextové odkazy** umístěné v rámečku. K procvičení a prohloubení učiva slouží **odkazy na použitou literaturu.**

Přeji vám hodně úspěchů při zvládnutí náročného učiva.
autorka

Po prostudování opory budete znát:

- jaké jsou vlastnosti vzájemně shodných, resp. vzájemně podobných rovinných útvarů.
- základní shodná zobrazení v rovině – osovou souměrnost, středovou souměrnost, otáčení a posunutí – jejich vlastnosti a užití.
- základní podobné zobrazení v rovině – stejnolehlost – její vlastnosti a užití.
- principy, podle nichž lze shodnosti konstruktivně využít k sestrojení rovinných objektů.
- principy, podle nichž lze stejnolehlost konstruktivně využít k sestrojení rovinných objektů.
- Pythagorovu větu, Euklidovy věty, čtvrtou geometrickou úměrnou – jejich principy a oblasti užití, zejména užití ke konstrukci úsečky délky dané algebraickým výrazem.

Po prostudování opory budete schopni:

- rozpoznat vzájemně shodné, resp. vzájemně podobné rovinné útvary.
- daný rovinný útvar zobrazit v libovolném základním shodném zobrazení a ve stejnolehlosti.
- užít shodná zobrazení ke konstrukci rovinných útvarů s požadovanými vlastnostmi.
- užít stejnolehlost ke konstrukci rovinných útvarů s požadovanými vlastnostmi.
- provést zkoušku správnosti řešení konstruktivní úlohy.
- sestrojit úsečku vyjádřenou algebraickým výrazem, užít k řešení Pythagorovu větu, Euklidovy věty a čtvrtou geometrickou úměrnou.

1 Shodnost a podobnost rovinných útvarů

<u>V této kapitole se dozvíte</u>: *jaké vlastnosti mají vzájemně shodné, resp. vzájemně podobné rovinné útvary, co je to koeficient podobnosti.*

<u>V této kapitole se naučíte</u>: *jak zjistit, zda dané útvary jsou shodné (přímo či nepřímo); jak zjistit, zda dané útvary jsou podobné, jaký je jejich koeficient podobnosti*

<u>Klíčová slova kapitoly</u>: ***shodné útvary, podobné útvary; Pythagorova věta, Euklidova věta o odvěsně, Euklidova věta o výšce***

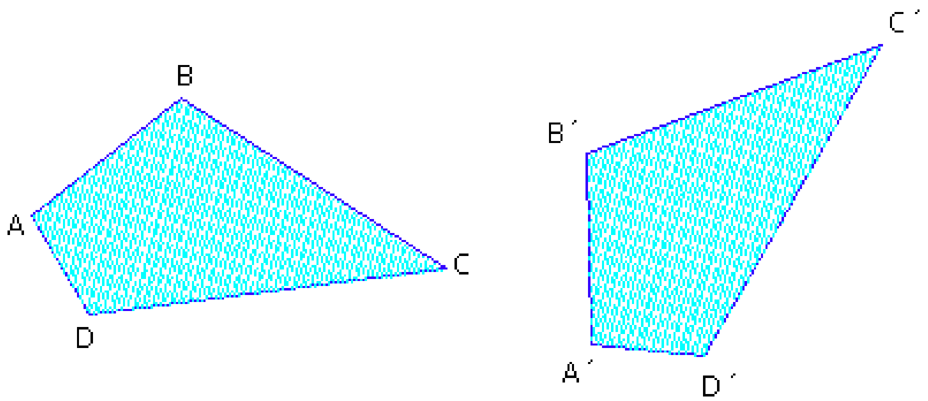
<u>Čas potřebný pro prostudování kapitoly</u>: *1 hod. teorie + 2 hod. nastudování a provedení konstrukcí*

1.1 Shodné rovinné útvary

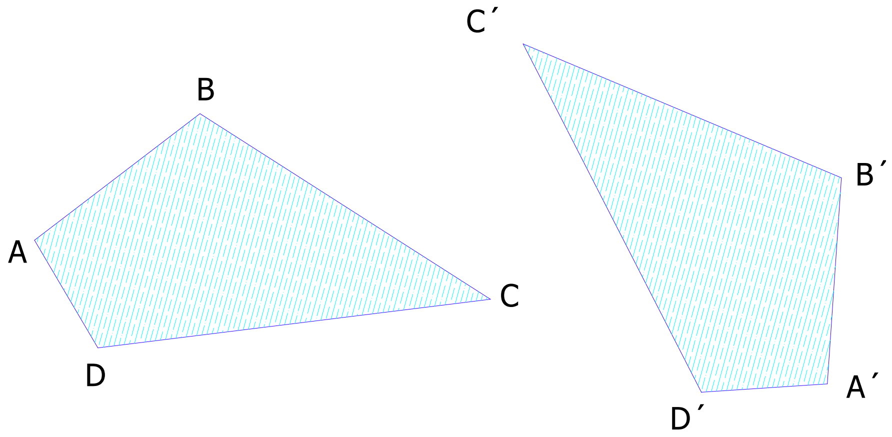
Shodné rovinné útvary pozná intuitivně každý z nás. Máme tendenci uvádět, že takové útvary jsou „stejné“, jen jinak umístěné. Tato intuice v podstatě odpovídá i planimetrické definici:

> Dva geometrické rovinné útvary pokládáme za **shodné**, pokud lze jeden na druhý přemístit tak, že se kryjí.

Při tomto přemísťování mohou ovšem nastat dva případy. Jeden útvar na druhý můžeme přemístit tak, že zmíněný pohyb probíhá v rovině, ve které tyto útvary leží (viz následující obrázek).



Druhou možností je, že útvar musíme nejprve „vyzdvihnout“ z roviny, pak překlopit a vrátit do roviny zpět. Důsledkem je opačné pořadí vrcholů čtených v dohodnutém směru (viz následující obrázek).

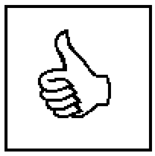


V prvním případě hovoříme o tzv. **přímé shodnosti**, ve druhém případě o tzv. **nepřímé shodnosti.**

1.2 Shodnost trojúhelníků

Shodnost trojúhelníků v planimetrických úlohách nezjišťujeme jejich přemísťováním, ale používáme tzv. **věty o shodnosti trojúhelníků**. Jsou to vlastně kritéria, podle kterých poznáme, kdy dva trojúhelníky jsou shodné.

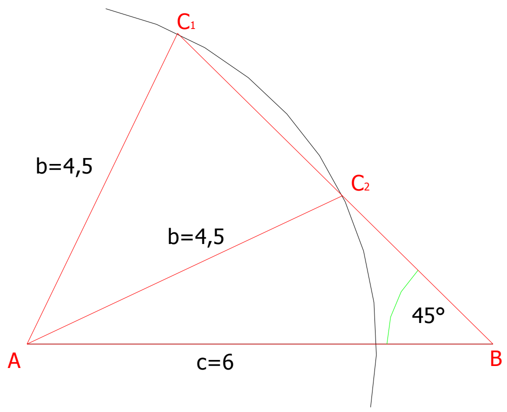
Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se:
1) ve třech stranách **(věta sss),**
2) ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném **(věta sus),**
3) v jedné straně a úhlech k ní přilehlých **(věta usu),**
4) ve dvou stranách a úhlu proti větší z nich **(věta Ssu).**



Pozn.: K daným větám platí i obrácená tvrzení.

Upozornění:

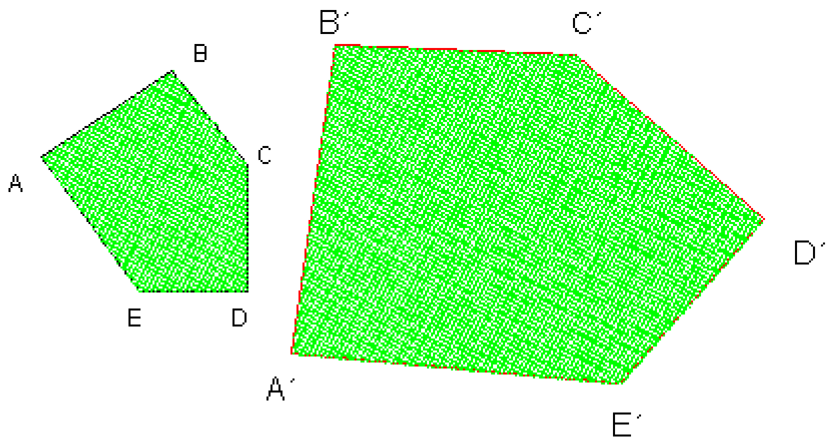
Pro vyšetření shodnosti můžeme použít kterékoli z těchto čtyř kritérií. Pozor dejte při aplikaci čtvrtého kritéria. Kdyby byl zadán úhel proti menší straně, trojúhelníky by nemusely být shodné. Zadejme například Δ ***ABC: c = 6, b = 4,5*** $\beta = 45°$ (úhel β leží proti menší straně ***b < c** !)* . Sledujte, co se stane při konstrukci tohoto trojúhelníku:



Tato ukázka názorně dokumentuje, že se dva trojúhelníky (ΔABC_1 a ΔABC_2) mohou shodovat ve dvou stranách a úhlu, shodné ovšem nejsou, protože daný úhel leží proti menší ze stran.

1.3 Podobné rovinné útvary

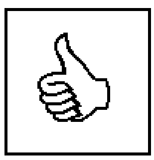
I u studia podobnosti rovinných útvarů budeme vycházet z vaší geometrické intuice. Klasickým příkladem podobnosti je fotografie a její zvětšenina. Každému je zřejmé, že na fotografiích vidí útvary **„stejného tvaru“,** ale odlišné velikosti. Za tímto poznatkem se skrývá fakt, že **podobné útvary mají konstantní poměr odpovídajících si úseček, a že odpovídající si úhly mají stejné velikosti**. Číslo, které udává, kolikrát jsou strany nového útvaru větší, resp. menší než strany původního útvaru, se nazývá **koeficient podobnosti.** Je-li toto číslo větší než 1, jedná se o **zvětšení** původního útvaru, je-li menší než 1, jedná se o **zmenšení** původního útvaru.



Na obrázku jsou dva podobné útvary, podobnost zapisujeme znakem **„~“**, zde konkrétně ***ABCDE ~ A´B´C´D´E´***. Strany útvaru ***A´B´C´D´E´*** jsou dvakrát větší než strany útvaru ***ABCDE***. Za koeficient podobnosti tedy můžeme považovat číslo 2. Odpověď, že koeficient podobnosti je $\frac{1}{2}$, je rovněž správná, jen nyní vycházíme z útvaru ***A´B´C´D´E´.***

Upozornění:
Koeficientem podobnosti dvou pětiúhelníků z obrázku je sice číslo 2, ale kdybychom se zajímali o poměr obsahů těchto obrazců, zjistili bychom, že obsah většího z nich je čtyřikrát větší než obsah menšího z nich.
Obecně platí:

Jsou-li dva rovinné útvary podobné a mají-li koeficient podobnosti **k**, je poměr jejich obsahů roven $\mathbf{k^2}$.



Dalšími trefnými příklady užití podobnosti v běžném životě jsou **turistické mapy** a plány měst. Důležitým údajem u nich je **měřítko** – tj. číslo, které uživatele informuje, kolikrát větší jsou skutečné vzdálenosti oproti těm naměřeným v mapě (např. 1 : 25 000 znamená, že 1 cm v mapě odpovídá 25 000 cm, tj. 250 m ve skutečnosti).

1.4 Podobnost trojúhelníků

Ve smyslu toho, co bylo uvedeno v předchozí kapitole, jsou dva trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ podobné, existuje-li kladné číslo **k (koeficient podobnosti)** takové, že platí:

$$k = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|C'A'|}{|CA|}.$$

Z definice je zřejmé, že za koeficient podobnosti zmíněných dvou trojúhelníků lze pokládat též číslo $\frac{1}{k}$.

K ověření podobnosti trojúhelníků používáme kromě této definice též tzv. **věty o podobnosti trojúhelníků**.

Dva trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se:

1) ve dvou úhlech **(věta uu),**
2) v poměru délek dvou stran a úhlu jimi sevřeném **(věta sus pro podobnost),**
3) v poměru délek dvou stran a úhlu proti větší z nich **(věta Ssu pro podobnost).**

Pozn.: K daným větám platí i obrácená tvrzení.

Podobnost trojúhelníků patří k principům, které jsou v planimetrii často užívány ke konstrukcím, důkazům apod. Nastudujte si nyní spolu se mnou několik základních úloh založených na užití podobnosti trojúhelníků. Jejich znalost je naprosto nezbytná pro vaše další studium tohoto tématu.

Př. 1: Konstrukce bodu dělícího danou úsečku v daném poměru

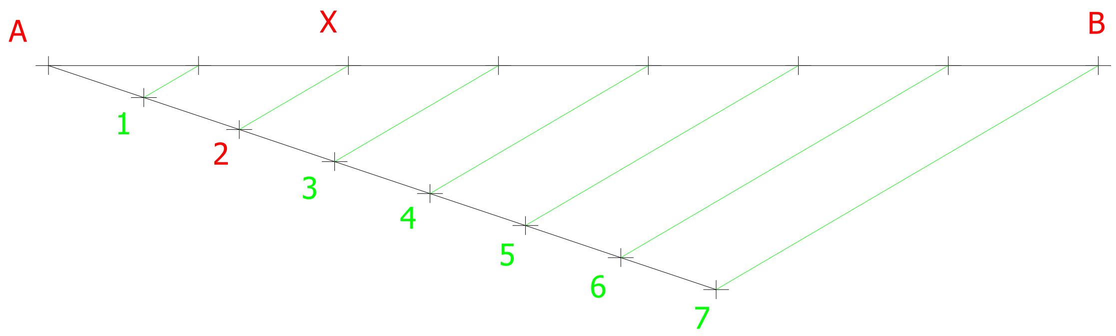
Je dána úsečka ***AB***. Sestrojte na ní bod, který ji dělí v poměru 2:5, přičemž kratší úsek je blíže k bodu ***A***.

Rozbor:

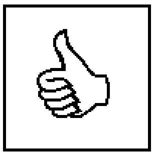
Je zřejmé, že pro nalezení bodu ***X*** musíme úsečku rozdělit na **7** shodných dílů. K tomu použiji konstrukci, kterou zřejmě znáte ze základní školy a která je založena na principu podobnosti trojúhelníků. Postupujeme tak, že krajním bodem (např. *A*) vedeme polopřímku pod libovolným ostrým úhlem (tzv. **redukčním úhlem**), naneseme na ni **7** libovolných shodných úseček a koncový bod pak spojíme s bodem *B*. Body 1, 2, …6 vedeme rovnoběžky s úsečkou **7*B***.

Všechny takto vzniklé trojúhelníky jsou vzájemně podobné podle věty sus pro podobnost. Nás bude zajímat $\triangle$ ***A2X***, protože bod ***X*** je řešením naší úlohy.

Konstrukce:



Poznámka: Bude-li vaším úkolem rozdělení úsečky např. na 4 díly, budete pochopitelně postupovat jednodušeji – úsečku kružítkem rozdělíte na polovinu a její polovinu opět na polovinu. Postup uvedený výše je vhodné aplikovat při dělení úsečky na **lichý počet dílů**.



Na podobnosti je rovněž založena velice důležitá konstrukce tzv. **čtvrté geometrické úměrné**. Jedná se vlastně o konstrukci úsečky neznámé délky *x*, která je dána vztahem

$$\boxed{x = \frac{a\,.\,b}{c}}\quad ,$$

kde ***a, b, c*** jsou délky známých úseček.

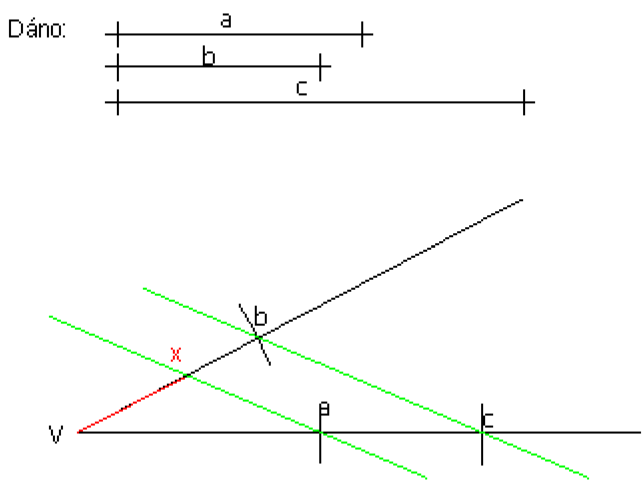
Př. 2: Sestrojte úsečku délky *x* , pro kterou platí: $x = \dfrac{a\,.\,b}{c}$ **.**

Uvedený vztah lze přepsat jako rovnost poměrů velikostí úseček, např.:

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{c} \quad .$$

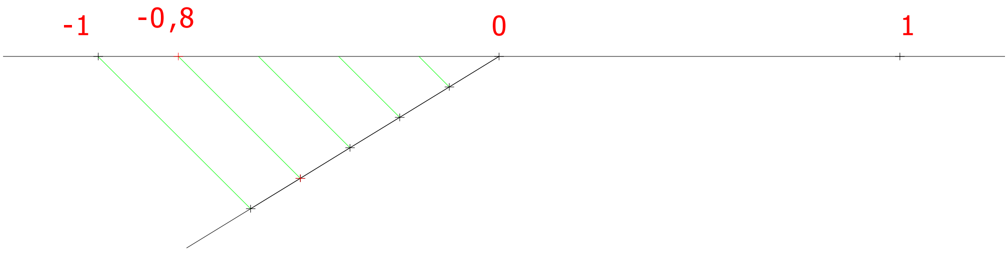
Na ramena libovolně zvoleného redukčního úhlu od jeho vrcholu naneseme úsečky ***b*** a ***c*** a spojíme koncové body, čímž vznikne trojúhelník. Na totéž rameno, na které jsme umístili délku ***c***, naneseme i délku úsečky ***a***. Koncovým bodem této úsečky vedeme rovnoběžku se spojnicí koncových bodů, která na druhém ramenu vymezí hledanou délku ***x***. Sami zkontrolujte správnost konstrukce. (Zapište si poměr velikostí stran ve dvou podobných trojúhelnících, které vidíte na následujícím obrázku).

Konstrukce:



Př. 3: Na číselné ose dané počátkem a jednotkovým bodem sestrojte obraz racionálního čísla $x = -\frac{4}{5} = -0{,}8$.

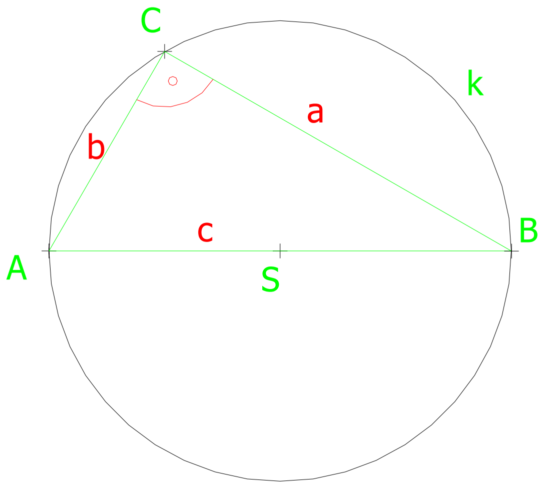
Řešení je patrné z následující konstrukce, která patří k základním konstrukcím, a proto byste ji měli běžně ovládat.



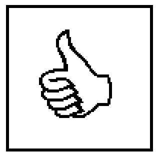
1.5 Pravoúhlý trojúhelník – Pythagorova věta, Euklidovy věty

Specifické vlastnosti pravoúhlého trojúhelníku si zaslouží zvláštní pozornost, protože mají obrovské využití v oblasti geometrických výpočtů i konstrukcí. Nejprve si zopakujme ty, které byste už měli znát:

1)

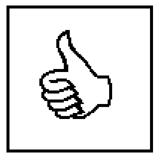


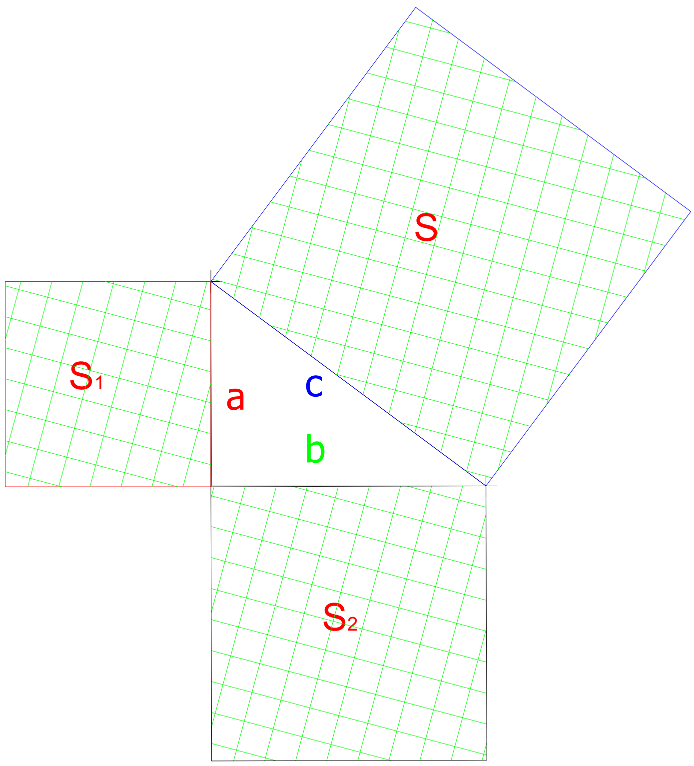
Kružnice opsaná pravoúhlému trojúhelníku je vlastně Thaletovou kružnicí nad úsečkou AB – přeponou trojúhelníku ABC. Její poloměr je proto roven polovině velikosti přepony.



2) **Pythagorova věta** dokládá vztah mezi odvěsnami a přeponou pravoúhlého trojúhelníku:

Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu obsahů čtverců sestrojených nad jeho odvěsnami.

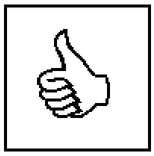




Platí tedy: $\boldsymbol{S = S_1 + S_2}$, neboli: $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$.

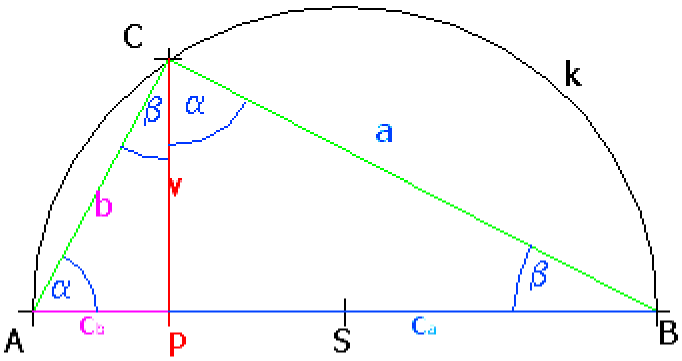
Poznámka:

Uvědomte si důležitý důsledek Pythagorovy věty: Kdykoli znáte dvě ze tří stran pravoúhlého trojúhelníku, jste schopni chybějící stranu: 1) spočítat,
2) sestrojit.



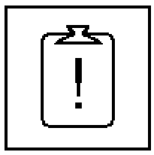
3) **Euklidovy věty o odvěsně a o výšce** se týkají vztahů v pravoúhlém trojúhelníku. V trojúhelníku ***ABC***, kde ***C*** je vrchol pravého úhlu, označme ***v*** výšku na přeponu, ***P*** patu výšky, $\boldsymbol{c_a}$ úsek na přeponě přilehlý k odvěsně ***a*** a $\boldsymbol{c_b}$ úsek na přeponě přilehlý k odvěsně ***b***. Výška ***v*** rozděluje daný trojúhelník na dva trojúhelníky, které jsou oba podobné s původním trojúhelníkem ***ABC***. Ověřte sami, že platí:

$$\Delta ABC \sim \Delta ACP \sim \Delta CBP$$



Z podobnosti trojúhelníků můžeme pomocí poměrů odpovídajících si stran zapsat následující vztahy:

- $$\frac{v}{c_b} = \frac{c_a}{v} \Rightarrow v^2 = c_a \cdot c_b$$ tzv. **Euklidova věta o výšce,**



- $$\frac{c_a}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow a^2 = c_a \cdot c$$ $$\frac{c_b}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow b^2 = c_b \cdot c$$ tzv. **Euklidovy věty o odvěsně.**

Poznámka:

Euklidovy věty se týkají velikostí úseček, tj. kladných reálných čísel. Používají se mimo jiné ke konstrukci obrazů iracionálních čísel nebo iracionálních násobků daných úseček. V takovýchto případech se užívá jejich zápis pomocí odmocnin:

- $$v = \sqrt{c_a \, . \, c_b} \qquad a = \sqrt{c_a \, . \, c} \qquad b = \sqrt{c_b \, . \, c}$$

Na Pythagorovu větu a Euklidovy věty se budeme odkazovat v kapitole o konstrukcích na základě výpočtu.

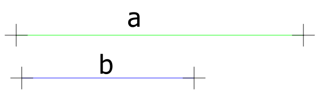
Pomocí Euklidových vět můžeme sestrojit tzv. **střední geometrickou úměrnou dvou úseček *a, b*.** Rozumí se tím úsečka **x**, pro jejíž délku platí:

$$x = \sqrt{a \, . \, b}$$.

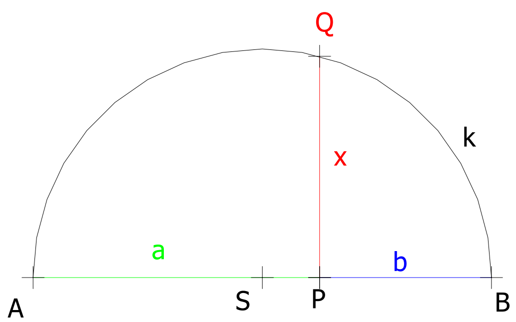
Poznámka:
V algebře veličinu ***x*** nazýváme **geometrickým průměrem** veličin ***a*** a ***b*.**

K sestrojení použijeme například Euklidovu větu o výšce. Sestrojíme pravoúhlý trojúhelník, ve kterém úseky přilehlé k odvěsnám mají délky ***a*** a ***b*.** Vyznačíme v něm výšku na přeponu, její délka je hledané ***x*.**

Jsou dány úsečky:



Konstrukce:

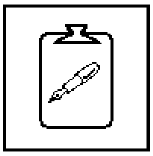


Postup konstrukce:
Na zvolenou přímku umístíme za sebe úsečky ***AP = a, PB = b***, nalezneme střed ***S*** úsečky ***AB***, opíšeme Thaletovu kružnici ***k***, v bodě ***P*** vztyčíme kolmici k ***AB***, její průsečík s kružnicí ***k*** označíme ***Q***. Hledaná úsečka je ***x = PQ*.**

2 Shodná zobrazení v rovině

<u>V této kapitole se dozvíte</u>: *co je to shodné zobrazení, jaké jsou základní typy shodných zobrazení, které body a útvary jsou v nich samodružné, jak se dají shodná zobrazení použít ke konstrukcím trojúhelníků a čtyřúhelníků.*

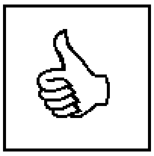
<u>V této kapitole se naučíte</u>: *zobrazit rovinný útvar v daném shodném zobrazení, využít shodné zobrazení v konstruktivních úlohách.*



<u>Klíčová slova kapitoly</u>: ***shodné zobrazení; samodružný bod zobrazení, útvar bodově samodružný, útvar samodružný jako celek; osová souměrnost; středová souměrnost; posunutí; otáčení; identita.***

<u>Čas potřebný pro prostudování kapitoly</u>: *4 hodiny teorie + 10 hodin řešení úloh a provedení konstrukcí*

2.1 Shodné zobrazení



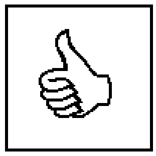
Shodné zobrazení (nebo také shodnost) v rovině je takové zobrazení, které každému bodu X roviny přiřadí bod X´ této roviny takovým způsobem, že **každá úsečka se zobrazí na úsečku s ní shodnou** – tj. mající stejnou velikost. Zobrazovaný útvar se nazývá **vzor**, výsledný útvar se nazývá **obraz**. O rovinném útvaru, který se v daném zobrazení zobrazí sám na sebe, říkáme, že je **samodružný jako celek**, pokud se zobrazí na sebe navíc každý jeho bod, říkáme, že je **bodově samodružný**.

Shodnost může být **přímá** nebo **nepřímá** podle toho, zda obrazy útvarů jsou přímo nebo nepřímo shodné se svými vzory (viz kapitola 1.1). Nejsnazší pomůckou, jak rozpoznat přímou a nepřímou shodnost, je zjistit, zda pořadí odpovídajících si vrcholů útvaru čtené u vzoru i obrazu např. ve směru pohybu hodinových ručiček, je stejné (přímá shodnost), nebo opačné (nepřímá shodnost). Shodná zobrazení lze skládat – tj. na obraz prvního zobrazení aplikovat další zobrazení, získaný obraz použít jako vzor pro další zobrazení atd. Hovoříme o tzv. **skládání zobrazení**. Výsledkem skládání shodných zobrazení musí být opět shodné zobrazení.

Některá základní shodná zobrazení znáte už z předchozí výuky planimetrie. Tyto vaše znalosti teď společně prohloubíme a rozšíříme. K základním typům shodných zobrazení řadíme **osovou souměrnost, středovou souměrnost, posunutí a otočení.** Každému z těchto zobrazení se budeme věnovat zvlášť, v závěru je pak všechna budeme používat k řešení konstrukčních úloh. Nesmíme zapomenout zmínit ještě tzv. **identitu**, tj. shodné zobrazení, které každý bod roviny zobrazí sám na sebe.

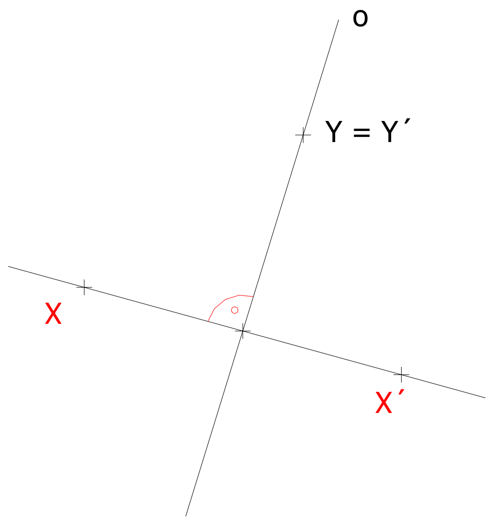
Ke každému shodnému zobrazení existuje tzv. **inverzní zobrazení**, které je definováno tak, že přiřazuje-li původní zobrazení Z bodu X bod X', přiřazuje k němu příslušné inverzní zobrazení (značí se Z^{-1}) bodu X' původní bod X. Zřejmě platí, že složením původního zobrazení a zobrazení k němu inverzního je identita.

2.2 Osová souměrnost



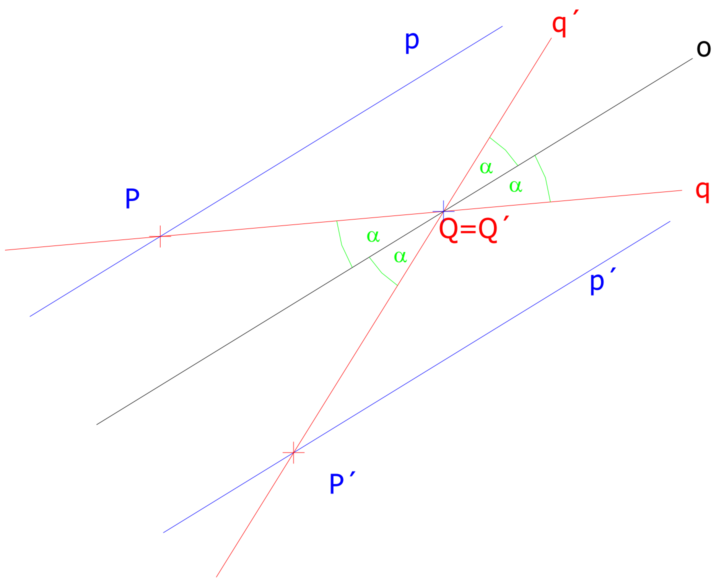
Osová souměrnost s osou o, tzv. osou souměrnosti, je shodné zobrazení, které každému bodu $X \notin o$ přiřadí bod X' tak, že úsečka XX' je kolmá na osu *o* a její střed leží na ose *o*. Každý bod $Y \in o$ se zobrazí sám na sebe, $Y = Y'$.

Symbolický zápis: $\boxed{O(o): X \to X'}$

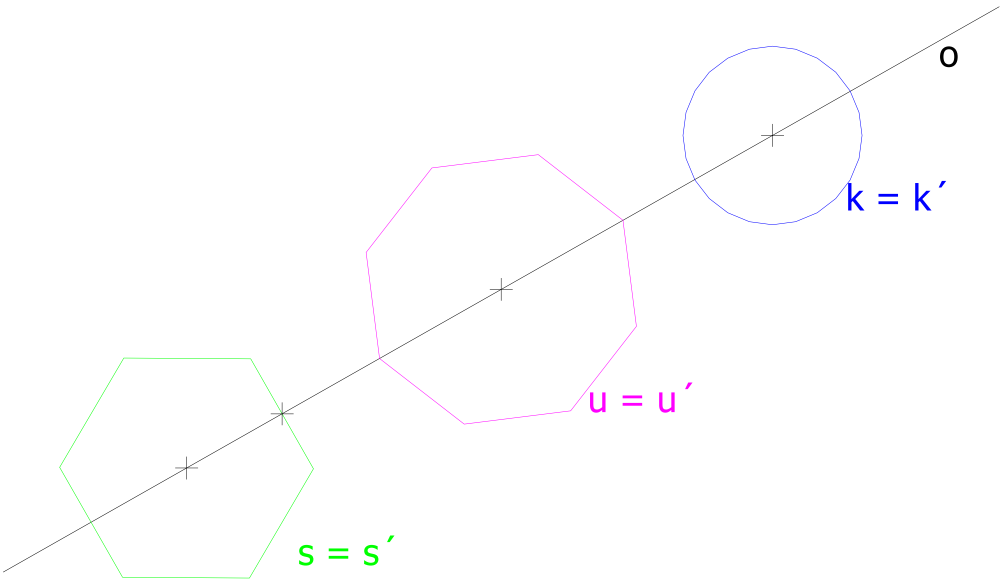


Zobrazení přímky v osové souměrnosti:

Přímka $\boldsymbol{p \neq o}$, $\boldsymbol{p \parallel o}$, se v osové souměrnosti s osou ***o*** zobrazí do přímky $\boldsymbol{p' \parallel p}$ ležící v opačné polorovině vůči ***o*** a ve stejné vzdálenosti od ***o*** jako ***p***. Přímka $\boldsymbol{q \nparallel o}$ se zobrazí do přímky ***q´***, která svírá s osou ***o*** stejný úhel jako přímka ***q***.



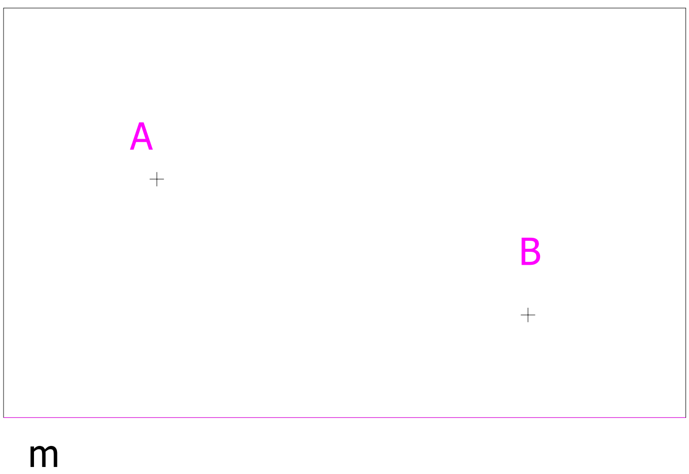
Samodružné útvary:
Evidentně je osa souměrnosti i každá její část množinou samodružných bodů. **Útvary, které jsou samodružné jako celek** a nejsou bodově samodružné, jsou všechny takové, které mají přímku ***o*** za svou osu souměrnosti. Například:



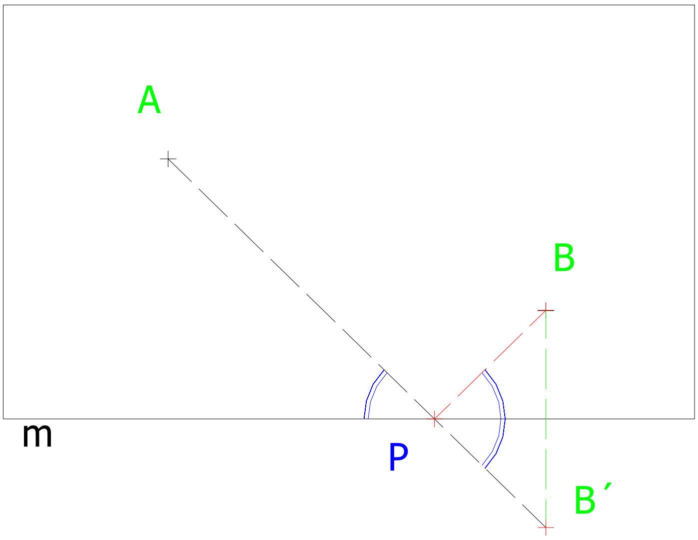
Ukážeme si teď nejčastější případy konstrukčního využití osové souměrnosti.

Př. o1: Na kulečníku (viz obrázek) dopravte kouli z místa *A* do místa *B* odrazem o mantinel *m*. (Úlohu řešíme ve schematickém zjednodušení: koule = bod.)

Zadání:



Při odrazu o mantinel musí platit, že úhel dopadu se rovná úhlu odrazu. Zakreslím do obrázku úhly, které musí mít v důsledku tohoto pravidla stejnou velikost a hned bude zřejmé, že úlohu lze řešit užitím osové souměrnosti.



Princip řešení: Úlohu řešíme pomocí osové souměrnosti s osou **m.**

Postup konstrukce:
Zobrazíme bod ***B***: ***O(m): B→B´***. Dráhu kulečníkové koule vlastně tímto postupem napřímíme do úsečky ***AB´.*** Úsečka ***AB´*** protne mantinel ***m*** v bodě ***P.*** Úsečky ***PB*** a ***PB´*** si odpovídají v osové souměrnosti s osou ***m***. Bod ***P*** je tedy hledaným místem odrazu, ve kterém se musí odrazit kulečníková koule, aby směřovala do pozice ***B.***

Poznámka:
Uvedená úloha patří mezi tzv. mantinelové úlohy. Lze ji různým způsobem modifikovat – můžete si dát za úkol dopravit kouli do pozice odraze o jiný mantinel, případně o dva předem dané sousední mantinely, o dva protilehlé mantinely, o tři mantinely…. Vyzkoušejte! S některou z těchto úloh se ještě setkáte v souhrnných úlohách k opakování zařazených v závěrečné části této kapitoly.

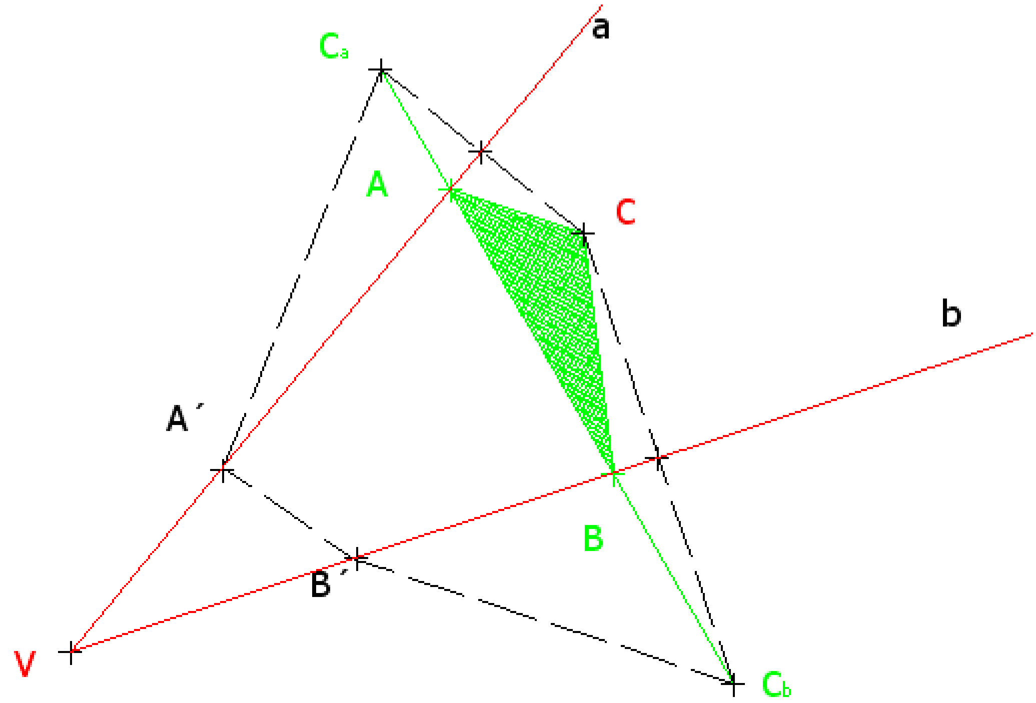
K dalším typům úloh, při jejichž řešení se využívá osová souměrnost, jsou úlohy o nejkratší spojnici daných bodů, která má tvar lomené čáry splňující určité vlastnosti.

Př. o2: Uvnitř ostrého úhlu různoběžek *a, b* je dán bod *C*. Sestrojte trojúhelník *ABC*, takový, aby $A \in a$, $B \in b$ a aby obvod trojúhelníku *ABC* byl minimální.

Rozbor:

Daná úloha je polohová, útvary ***a, b, C*** jsou dány. Načrtneme si ji, jako by byla vyřešena a budeme hledat souvislosti. Nejkratší vzdálenost dvou bodů v rovině je úsečka, budeme se proto snažit obvod trojúhelníku rozvinout do úsečky. To se nám podaří, užijeme-li osové souměrnosti s osami ***a*** a ***b*** a zobrazíme-li v nich bod ***C***. V každém jiném případě bude obvod trojúhelníku shodný s lomenou čarou, která je delší než úsečka C_aC_b.

Princip řešení: **$O(a)$: $C \to C_a$;** **$O(b)$: $C \to C_b$**

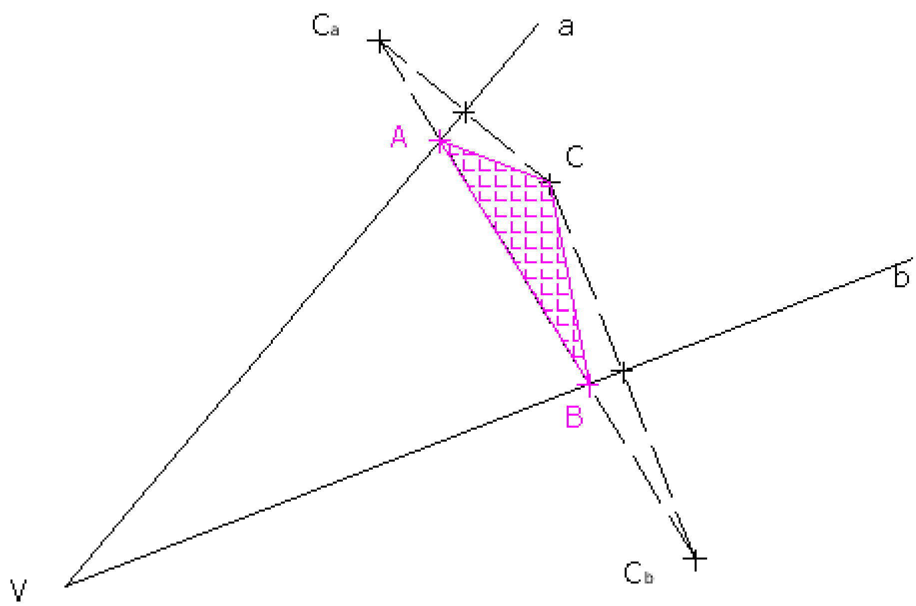


Při každé volbě bodů ***A´*** a ***B´*** zaznamenáváme, že délka lomené čáry, která je rovna obvodu trojúhelníku ***A´B´C***, je větší, než délka úsečky ***C_aC_b***, která je rovna obvodu trojúhelníku ***ABC***.

Postup konstrukce:

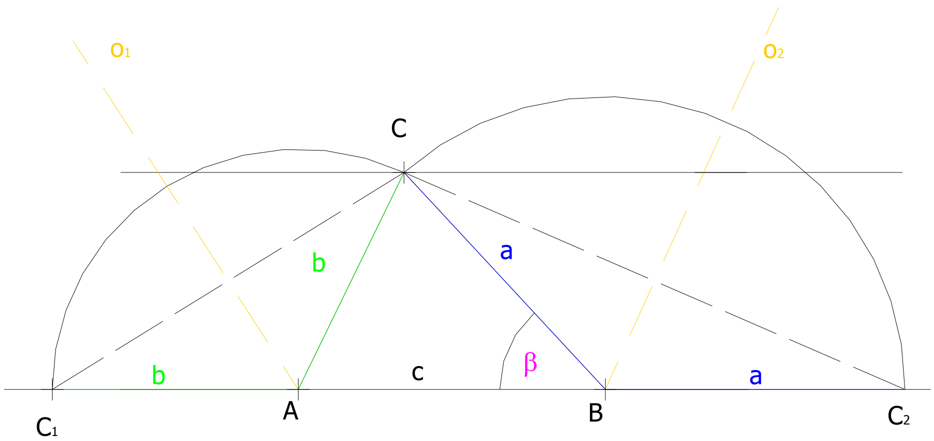
1) C_a; $O(a)$: $C \to C_a$,
2) C_b; $O(b)$: $C \to C_b$,
3) $\overline{C_aC_b}$,
4) A; $A \in \overline{C_aC_b} \cap a$,
5) B; $B \in \overline{C_aC_b} \cap b$,
6) ΔABC.

Konstrukce:



S dalším častým užitím osové souměrnosti se setkáváme při konstrukcích trojúhelníků a čtyřúhelníků, kdy je dán součet, případně rozdíl dvou stran nebo jiných význačných prvků. Jeden takový příklad si zde ukážeme, ostatní ponecháme do souhrnného cvičení.

Př. o3: Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li dáno: *a+b+c*, β, v_c
Daná úloha je nepolohová, do náčrtku vyznačíme zadané prvky a provedeme rozbor.

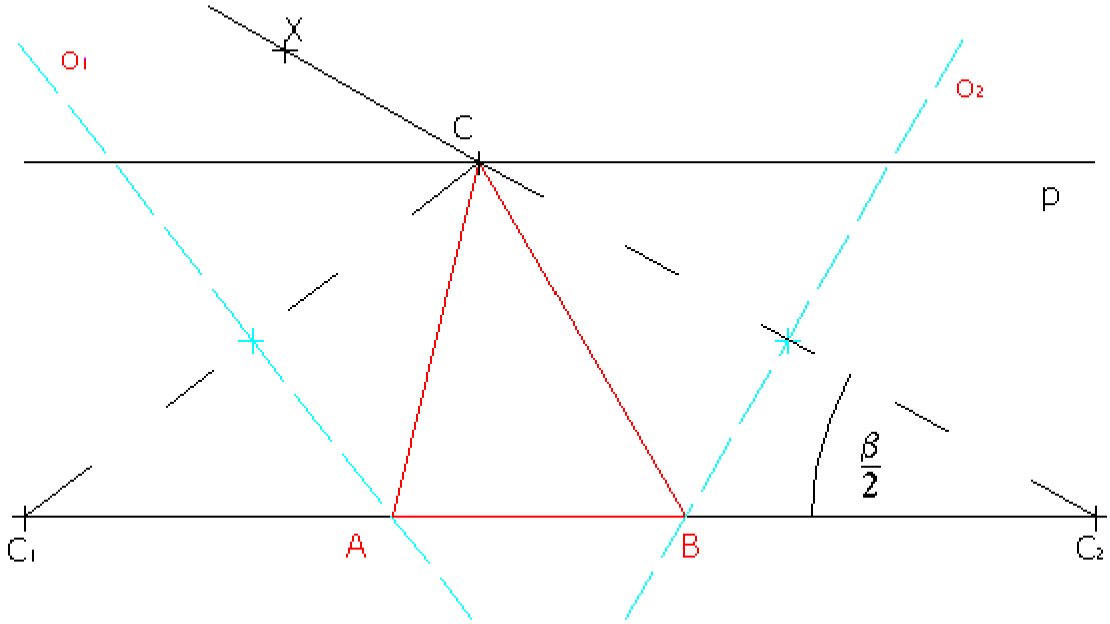


Úlohy, ve kterých figuruje součet stran, si zakreslete tak, aby daný součet byl rozvinutý do úsečky. Uvědomte si, že strany ***AC*** a ***BC*** jsou otočením kolem vrcholů ***A*** a ***B*** vlastně odklopeny do směru strany ***AB* = *c***. Konstrukci zahájíme tedy zřejmě umístěním úsečky C_1C_2, která má délku ***a+b+c*** . Neznáme ovšem polohu bodů ***A*** a ***B*** na této úsečce. Víme o nich ale, že jsou to hlavní vrcholy **rovnoramenných trojúhelníků.** Tento fakt můžeme využít, až budeme znát polohu bodu ***C.***
Známe velikost výšky na stranu ***c***, takže sestrojíme rovnoběžku ***p*** s C_1C_2 ve vzdálenosti v_c .
Vyznačený úhel β je vnějším úhlem trojúhelníku BCC_2. Vnější úhel je vždy roven součtu dvou vnitřních úhlů u zbývajících vrcholů ***C*** a C_2. Jelikož tyto dva úhly jsou shodné, je velikost každého z nich rovna ½ β. Vedeme tedy z bodu C_2 polopřímku svírající s úsečkou C_1C_2 úhel ½ β, která protne přímku ***p*** v bodě ***C***. Zbývá sestrojit vrcholy ***A*** a ***B.*** Zmíněné rovnoramenné trojúhelníky C_1AC a C_2BC jsou rovnoramenné, a tudíž osově souměrné. Přímky o_1 a o_2 sestrojené jako osy souměrnosti úseček C_1C a CC_2 protnou úsečku C_1C_2 po řadě v bodech ***A*** a ***B***. Zbývá doplnit $\triangle$***ABC.***

Postup konstrukce:

1) $\mathrm{C_1C_2}; |\mathrm{C_1C_2}| = a+b+c,$
2) $p;\ |p, \mathrm{C_1C_2}| = v_c\,,$
3) $\overrightarrow{C_2X};\ |\angle \mathrm{C_1C_2}X| = \dfrac{\beta}{2}\ ,$
4) $C;\ C \in \overrightarrow{C_2X} \cap p,$
5) $o_1, o_2;\ o_1 je\, osa\, CC_1,\ o_2 je\, osa\, CC_2\,,$
6) $A,\ B;\ A \in o_1 \cap C_1C_2,\ B \in o_2 \cap C_1C_2,$
7) $\Delta ABC.$

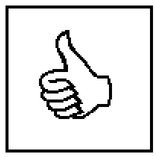
Konstrukce (pro ***a+b+c*** = 9; β = 60°; v_c= 3):



Při uvedeném zadání má úloha jediné řešení

Další úlohy, které se řeší užitím principu osové souměrnosti, vás čekají v kapitole „Souhrnné úlohy řešené užitím shodných zobrazení“.

2.3 Středová souměrnost

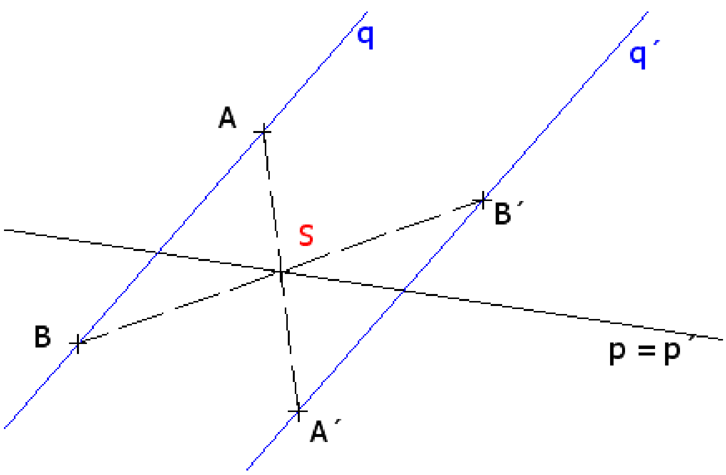


Středová souměrnost se středem *S*, tzv. středem souměrnosti, je shodné zobrazení, které každému bodu ***X ≠ S*** přiřadí bod ***X´*** tak, že bod ***S*** je středem úsečky ***XX´***, bod ***S*** je v tomto zobrazení samodružný (***S = S´***).

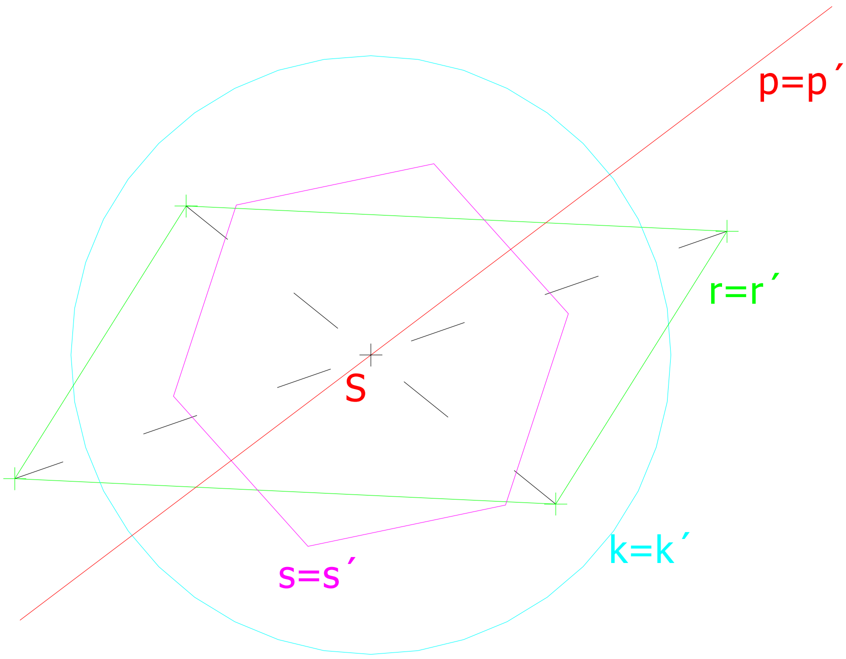
Symbolický zápis: $S(S): X \rightarrow X'$

Zobrazení přímky ve středové souměrnosti:

Přímka ***p*** procházející středem souměrnosti ***S*** je jako celek samodružná. Každá jiná přímka ***q*** neprocházející ***S*** se zobrazí do rovnoběžné přímky ***q´ // q*.**



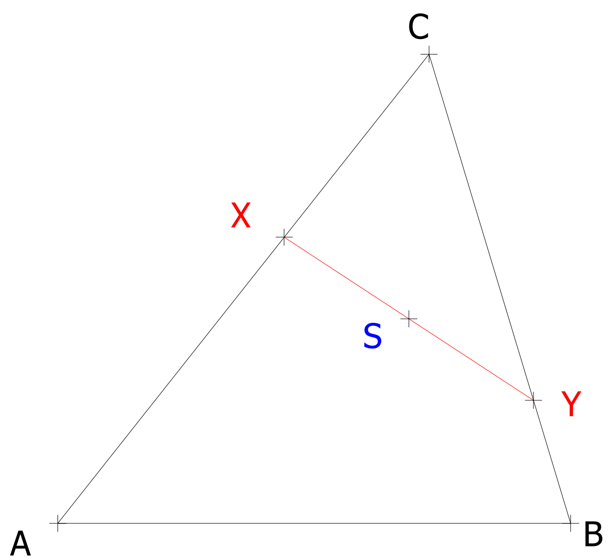
Útvary samodružné ve středové souměrnosti: Bodově samodružný je pouze samotný střed souměrnosti. Útvary samodružné jako celek jsou všechny takové, které jsou **středově souměrné** podle daného středu ***S*.** Jsou to mimo jiné přímky procházející středem ***S***, kružnice se středem v bodě ***S***, **pravidelné n-úhelníky se sudým počtem vrcholů** středově souměrné podle *S* (tj. čtverec, pravidelný šestiúhelník, osmiúhelník…), z nepravidelných útvarů např. **rovnoběžník** se středem ***S*** a jiné.



Ukážeme si nyní několik typů úloh, k jejichž řešení se užívá středová souměrnost.

Př. s1: Je dán bod *S* ležící uvnitř daného trojúhelníku *ABC*. Sestrojte takovou jeho příčku, která je bodem *S* půlena.

Rozbor:

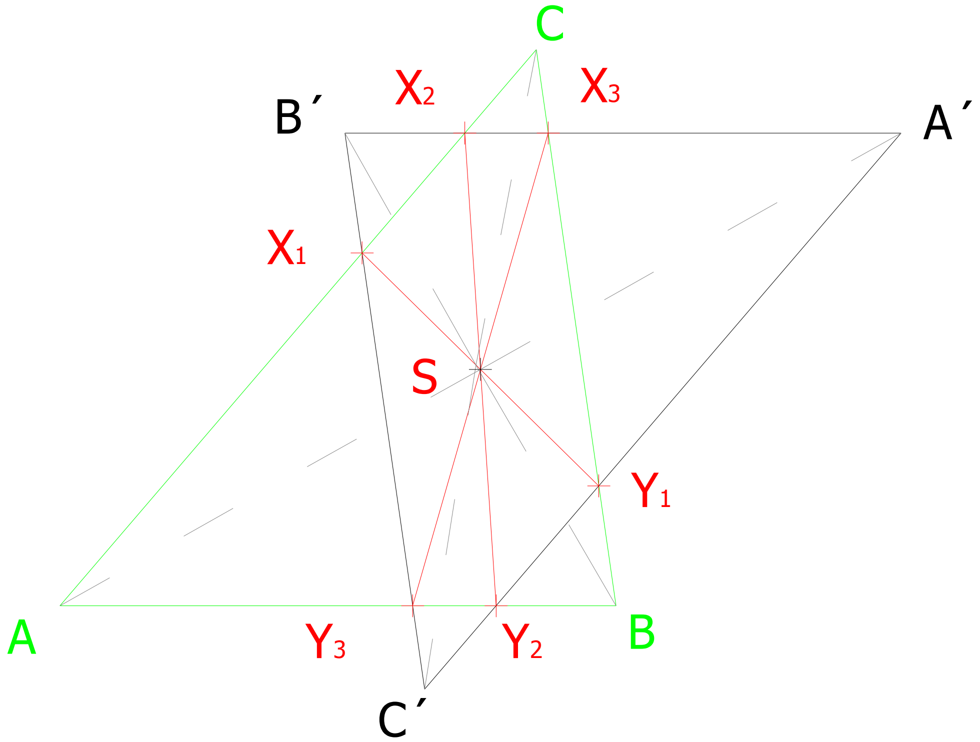


Uvědomte si, že krajní body hledané úsečky leží na hranici daného trojúhelníku a odpovídají si ve středové souměrnosti se středem ***S***.

Tedy: ***S(S) : X*** ↔ ***Y***

Neznáme jejich polohu, ale známe objekt, na kterém leží vzor i obraz. Zobrazíme tedy ve středové souměrnosti se středem ***S*** trojúhelník ***ABC*** a kde se protnou hranice vzoru ***ABC*** a obrazu ***A´B´C´*** , budou ležet hledané krajní body příčky.

Konstrukce:

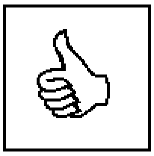


Diskuse:
Podle polohy bodu ***S*** v trojúhelníku může úloha mít 1, 2 nebo 3 řešení. (Načrtněte !)

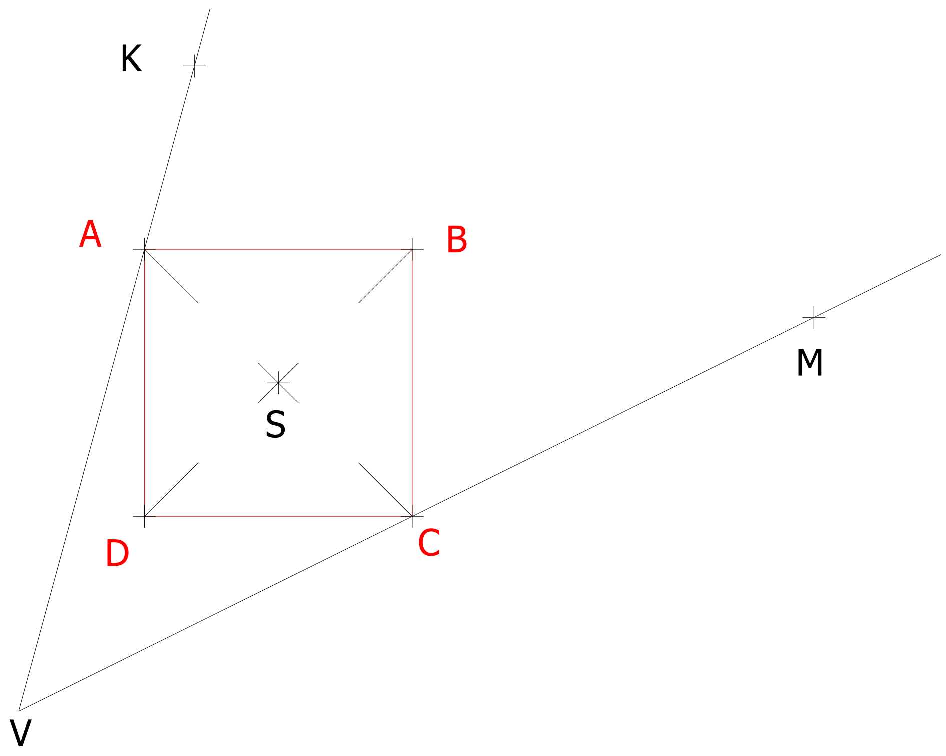
Př. s2: Je dán bod *S* ležící uvnitř ostrého úhlu *KVM.* Sestrojte čtverec *ABCD* takový, že *S* je jeho středem, bod *A* leží na polopřímce *VK* a bod *C* na polopřímce *VM.*

Rozbor:

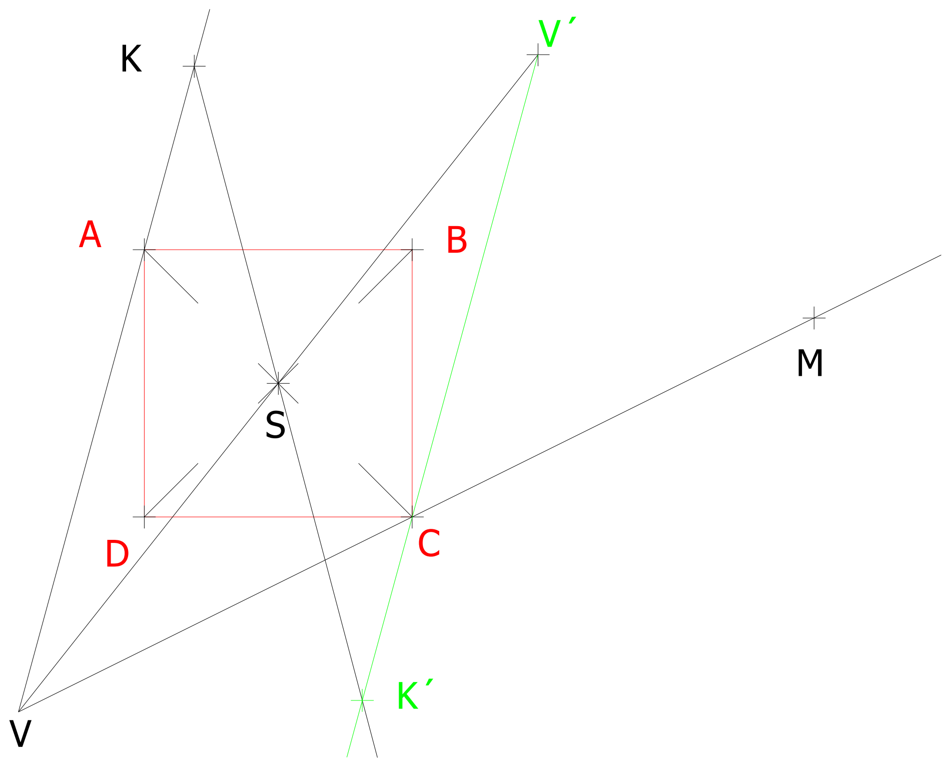
V případě, jako je tento, je velice důležité si pořídit **reálný náčrtek situace**. Vzpomeňte si na rady z prvního dílu – úlohu je třeba si **načrtnout tak, jako by už byla vyřešena**. Črtat čtverec daných vlastností do ostrého úhlu je obtížné, nemusí se vám to podařit – proto je třeba **„začít od konce“**.



Nejprve načrtněte čtverec se středem ***S***, pak dokreslete ostrý úhel ***KVM****,* aby byly splněny všechny požadavky úlohy. Pak si dobře ujasněte, co je dáno (je to pouze úhel ***KVM*** a bod ***S***!) a přemýšlejte, jak od zadání přejít k bodům, které jsou součástí řešení. Klíčové zřejmě budou body ***A*** a ***C***. Čtverec je středově souměrný útvar a jeho protilehlé vrcholy si odpovídají ve středové souměrnosti se středem ***S***. A my známe objekty, na kterých mají tyto vrcholy ležet – jsou to ramena úhlu, polopřímky ***VK*** a ***VM***. Stačí tedy jednu z nich – např. ***VK*** zobrazit ve středové souměrnosti se středem ***S*** a její obraz ***V´K´*** musí nutně v průsečíku s ***VM*** dát bod ***C.*** Ověřte si tuto úvahu na následujícím náčrtku.



Podařilo se? Porovnejte svůj náčrtek s následujícím obrázkem:

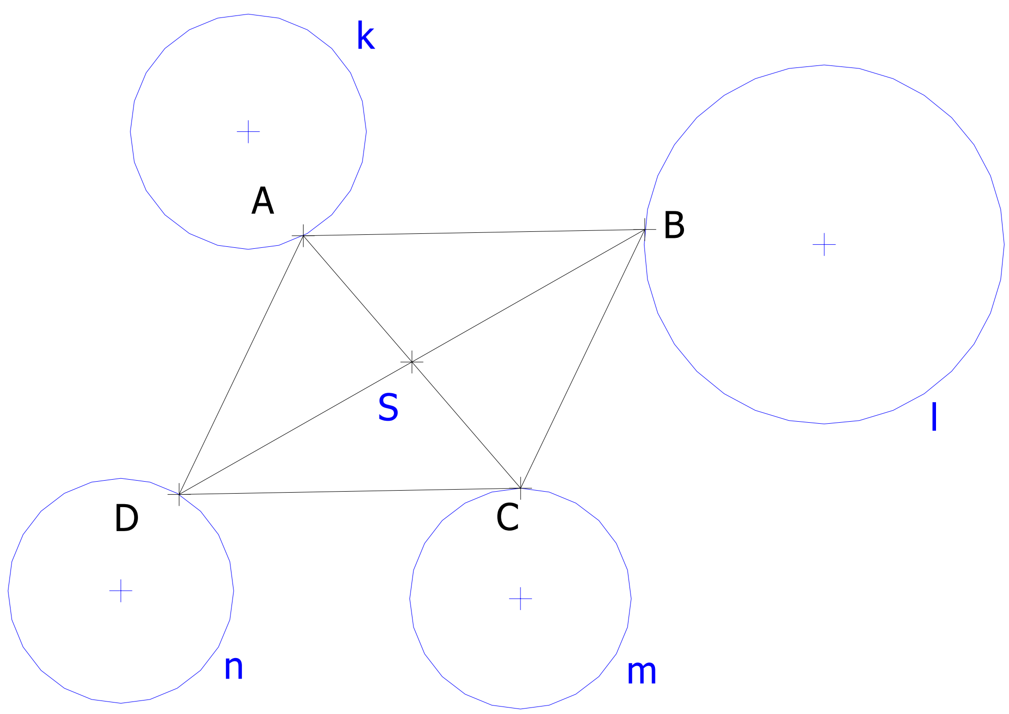


Principem řešení je tedy středová souměrnost se středem ***S***. V této fázi řešení už známe bod ***C***. Bod ***A*** získáme jako obraz bodu ***C*** v téže středové souměrnosti. Úsečka ***AC*** je úhlopříčkou hledaného čtverce – stačí doplnit chybějící vrcholy, např. pomocí kružnice opsané a kolmice k ***AC*** procházející ***S***.

Zapište sami postup konstrukce a konstrukci dokončete. Pro zadání zvolte polohu úhlu ***KVM*** a bodu ***S*** podle prvního náčrtku.

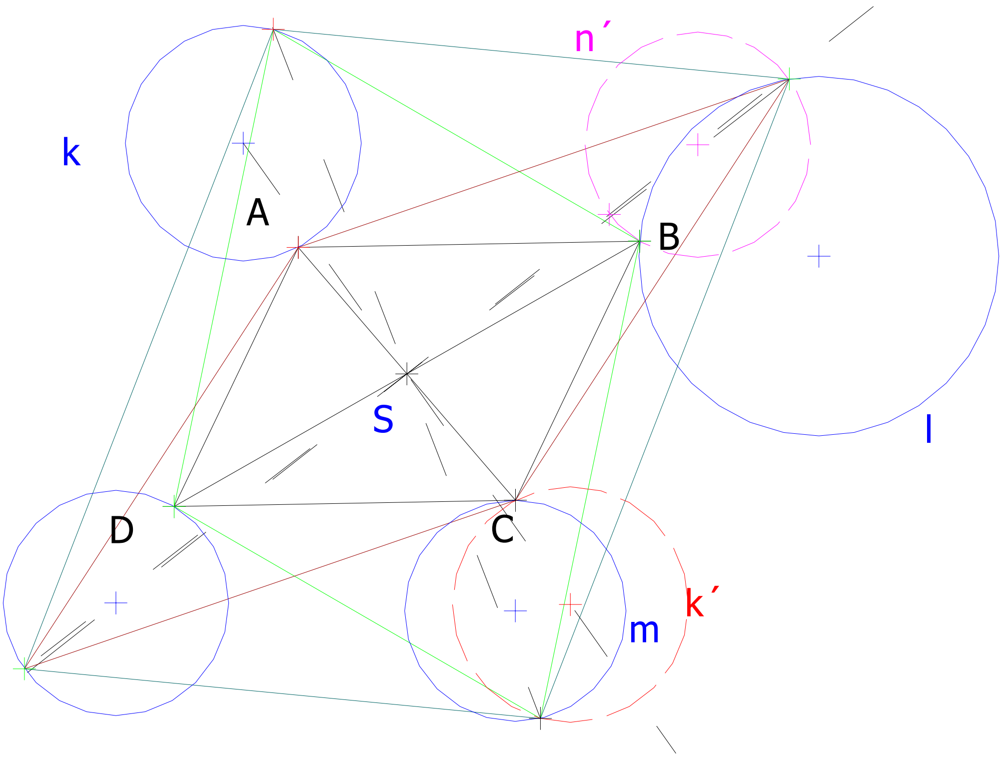
Př. s3: Jsou dány čtyři kružnice *k, l, m, n* a bod *S*. Sestrojte rovnoběžník *ABCD* takový, že bod *A* leží na *k*, *B* leží na *l*, *C* leží na *m* a *D* leží na *n*.

Náčrtek:
Při pořizování náčrtku začněte opět „od konce“. Načrtněte si rovnoběžník, vyznačte jeho střed ***S*** a do vrcholů umístěte postupně kružnice ***k, l, m, n***.



Je zřejmé, že body ***A*** a ***C***, resp. ***B*** a ***D*** si odpovídají ve středové souměrnosti se středem ***S***. Postačí tedy v této středové souměrnosti zobrazit kružnici ***k*** a určit průsečík tohoto obrazu s ***m*** – vznikne tak bod ***C***. Zpětným středovým zobrazením bodu ***C*** získáme bod ***A***. Stejně postupujeme i s kružnicemi ***n*** a ***l***. Obdobně v průniku obrazu ***n*** a kružnice **l** získáme bod ***B***, zpětně z něj bod ***D***.

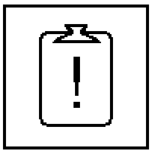
Pokaždé můžeme získat 0, 1 nebo 2 průsečíky kružnic, úloha tedy může mít 0, 1, 2 nebo 4 řešení. Prostudujte pozorně následující konstrukci i její zápis. Zapisujeme jen postup konstrukce jednoho řešení. Vyrýsována jsou všechna. Zadání pro konstrukci je zvoleno graficky.



Postup konstrukce:

1) $k': S(S): k \to k'$,
2) $C;\ C \in m \cap k'$,
3) $n': S(S): n \to n'$,
4) $B;\ B \in l \cap n'$,
5) $A;\ S(S): C \to A$,
6) $D;\ S(S): B \to D$,
7) *rovnoběžník ABCD.*

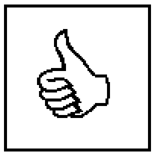
Konstrukci si sami vyrýsujte, je to velice užitečné pro pochopení problematiky užití shodných zobrazení. V případě dílčího neúspěchu porovnejte svůj rys s výše uvedenou konstrukcí. Zadání zvolte obdobně jako v prvním náčrtku – jen bez bodů *A, B, C, D* ! Ty máte za úkol teprve sestrojit !



Další úlohy, které se řeší užitím principu středové souměrnosti, vás čekají v kapitole „Souhrnné úlohy řešené užitím shodných zobrazení“.

2.4 Posunutí

Posunutí, neboli **translace,** je shodné zobrazení, které je dáno **orientovanou úsečkou *AB*** a ve kterém se bod ***X*** zobrazí na bod ***X´*** tak, aby orientovaná úsečka ***XX´*** měla **stejnou velikost i stejný směr** jako orientovaná úsečka ***AB*.**

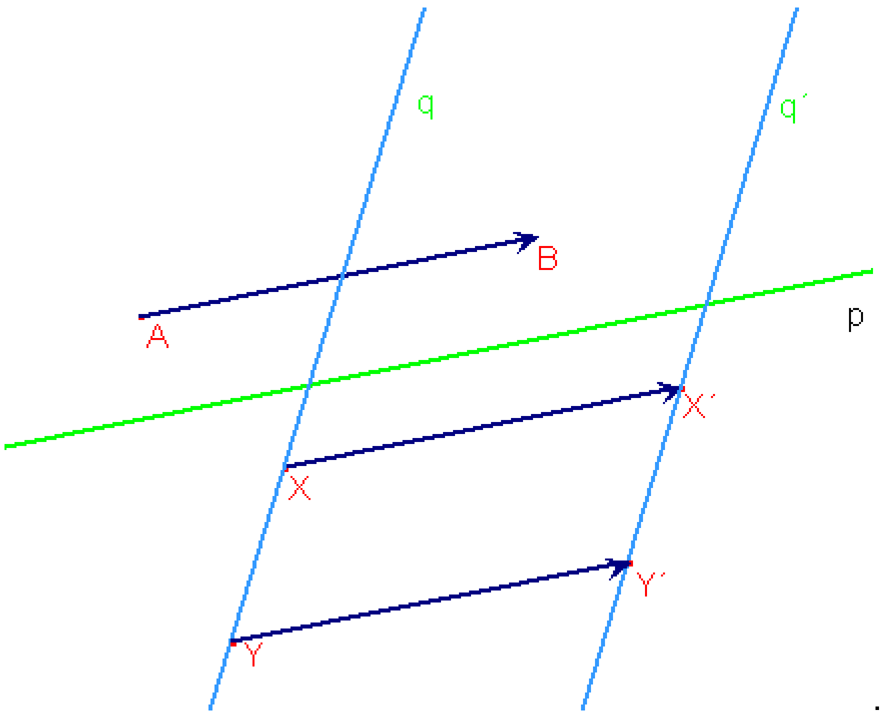


Symbolický zápis: $\boxed{T(\overrightarrow{AB}): X \to X'}$

Poznámka:
U orientované úsečky se na rozdíl od „obyčejné“ úsečky rozlišuje počáteční bod a koncový bod. V posunutí je počáteční bod vzorem a koncový bod jeho obrazem.

Zobrazení přímky v posunutí:

Přímka ***p*** rovnoběžná s $\overrightarrow{AB}$ je jako celek **samodružná,** každá jiná přímka se zobrazí do přímky **rovnoběžné:**



Platí:

$$T(\overrightarrow{AB}) : p \to p'; \; p = p'$$

$$T(\overrightarrow{AB}) : q \to q'; \; q \parallel q'$$

Útvary samodružné v posunutí jsou pouze přímky rovnoběžné se směrem posunutí, případně rovinné pásy toho směru.

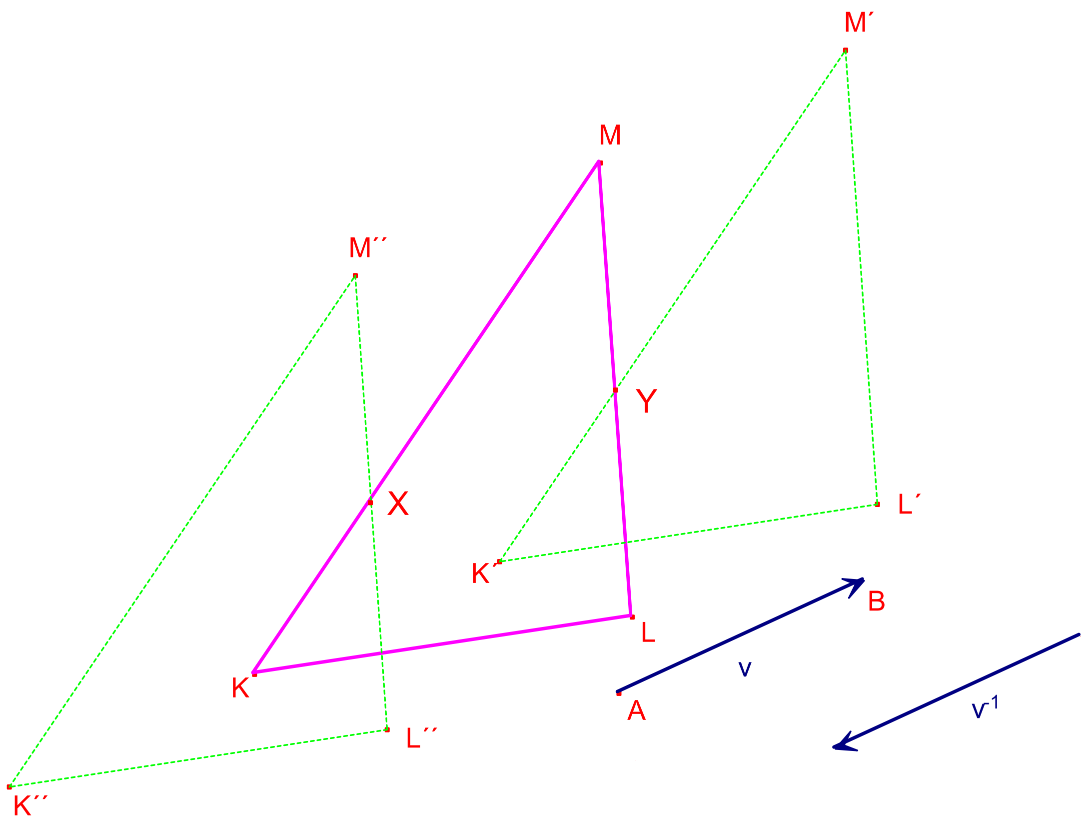
Ukážeme si nyní několik úloh, kde se jako princip řešení uplatní posunutí.

Př. t1: Je dána úsečka *AB* a trojúhelník *KLM*. Na hranici trojúhelníku stanovte takové body *X, Y*, že úsečka *XY* je rovnoběžná a stejně dlouhá jako úsečka *AB*.

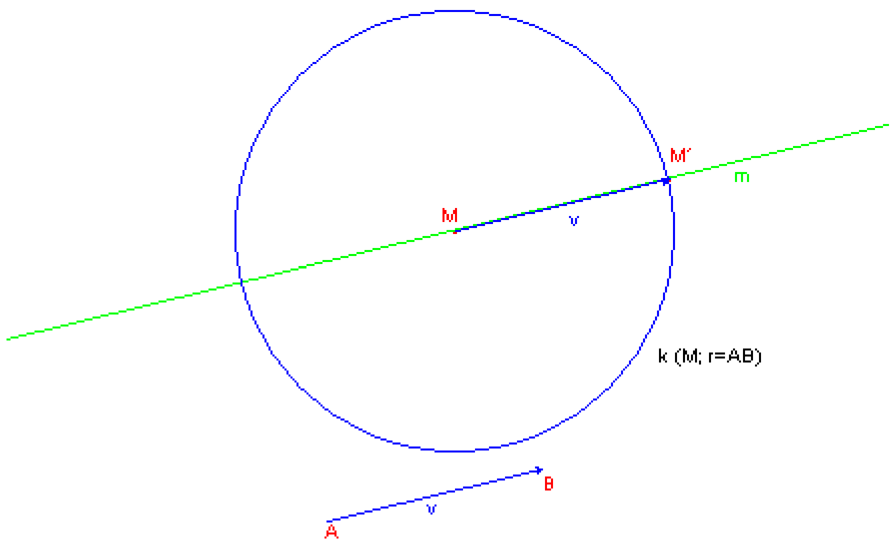
Rozbor:
Musíte si uvědomit, že podle zadání je hledaný bod ***Y*** obrazem hledaného bodu ***X*** v posunutí daném orientovanou úsečkou ***AB***. Žádný z těchto bodů není k dispozici, ale známe objekt, na kterém vzor ***X*** i obraz ***Y*** leží – je to **hranice trojúhelníku *KLM*.** Posuneme tedy celý trojúhelník.

$$T(\overrightarrow{AB}) : \Delta KLM \to \Delta K'L'M'$$

V průniku hranic obrazu ***K´L´M´*** a ***KLM*** nalezneme bod ***Y***. Bod ***X*** můžeme nalézt pomocí inverzního posunutí T^{-1}: ***Y***$\to$***X*** aplikovaného vektorem v^{-1}.



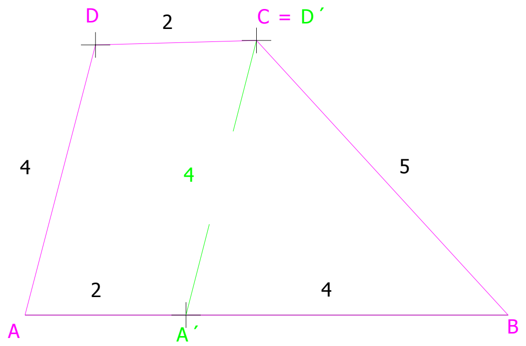
Poznámka ke konstrukci:
Doporučuji vám, abyste si konstrukci provedli vlastnoručně sami. Podle uvedeného rozborového obrázku si zvolte polohu trojúhelníka ***KLM*** a úsečky ***AB***. Např. bod ***M*** posouváme ve směru orientované úsečky ***AB*** tak, že bodem ***M*** vedeme rovnoběžku ***m*** s úsečkou ***AB*** a od bodu ***M*** na ni kružítkem naneseme délku ***AB***. Ze dvou průsečíků rovnoběžky a kružnice označíme jako ***M´*** ten, pro který platí, že orientované úsečky ***AB*** a ***MM´*** mají stejnou orientaci: $T\left(\overrightarrow{AB}\right)\ :\ M \rightarrow M'$



Stejný postup aplikujte na zbylé vrcholy trojúhelníku.

Př.t2: Je dána úsečka *AB*, |*AB*| = 6 cm. Sestrojte lichoběžník *ABCD* (*AB*∥*CD*), ve kterém: |*CD*| = 2 cm, |*AD*| = 4 cm a |*BC*| = 5 cm.

Rozbor:



V posunutí, daném orientovanou úsečkou ***DC*,** přechází strana ***AD*** do úsečky ***A´D´***, kde ovšem ***D´= C***. Vzniká trojúhelník ***A´BC***, ve kterém známe všechny tři strany, a můžeme jej tedy sestrojit. Pak připojíme rovnoběžník ***AA´CD*** a získáme tak zbývající vrcholy lichoběžníku. Konstrukce je tedy jednoduchá, uvedu zde pouze její postup:

Postup konstrukce:

1) $\overline{AB};\ |AB| = 6,$

2) $A´;\ A´\in AB, |AA´| = 2,$

3) $\Delta A´BC; |A´C| = 4,\ |BC| = 5,$

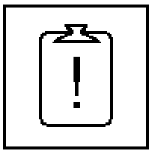
4) *rovnoběžník AA´CD,*

5) *lichoběžníkABCD.*

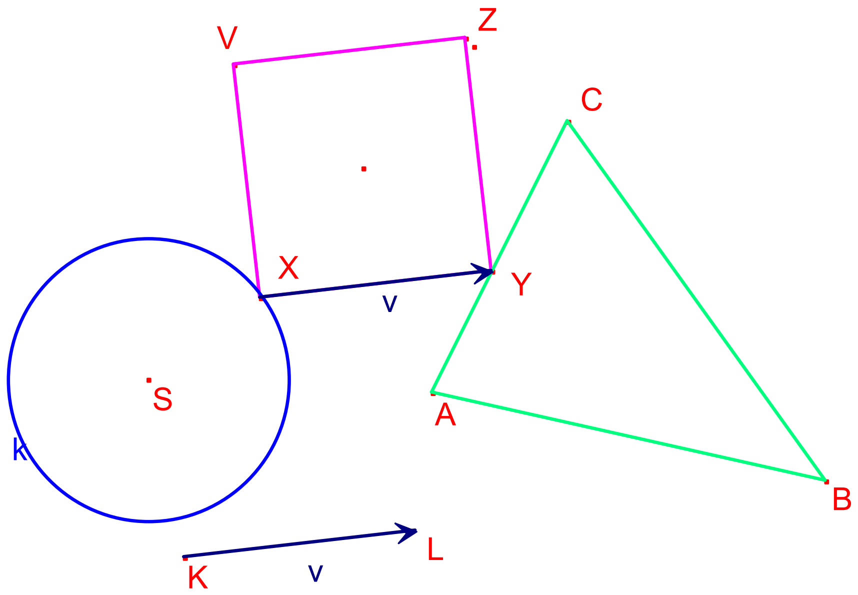
Př. t3: Je dána úsečka *KL*, kružnice *k* a trojúhelník *ABC*, přičemž kružnice a trojúhelník nemají žádné společné body. Sestrojte čtverec XYZV tak, aby jeho strana *XY* byla rovnoběžná s úsečkou *KL* a měla stejnou velikost jako *KL* a aby přitom bod *X* ležel na kružnici *k* a bod *Y* na hranici trojúhelníku *ABC*.

Poznámka k náčrtku:

Než se pustíte do náčrtku, uvědomte si, že je obtížné nejprve zakreslit dané objekty a pak se tam snažit „zapasovat" čtverec, aby měl požadované vlastnosti a jako čtverec opravdu vypadal. Schůdnější je začít kresbou čtverce a pak podle zadání dokreslit zadané objekty – tj. kružnici, trojúhelník a úsečku AB. Vše se snažte črtat od ruky, neváhejte si barevně odlišit to, co je dáno, od toho, co má teprve vzniknout. Nad takto provedeným náčrtkem teprve začněte uvažovat, jak od zadaných prvků dojít k tomu, co hledáme.

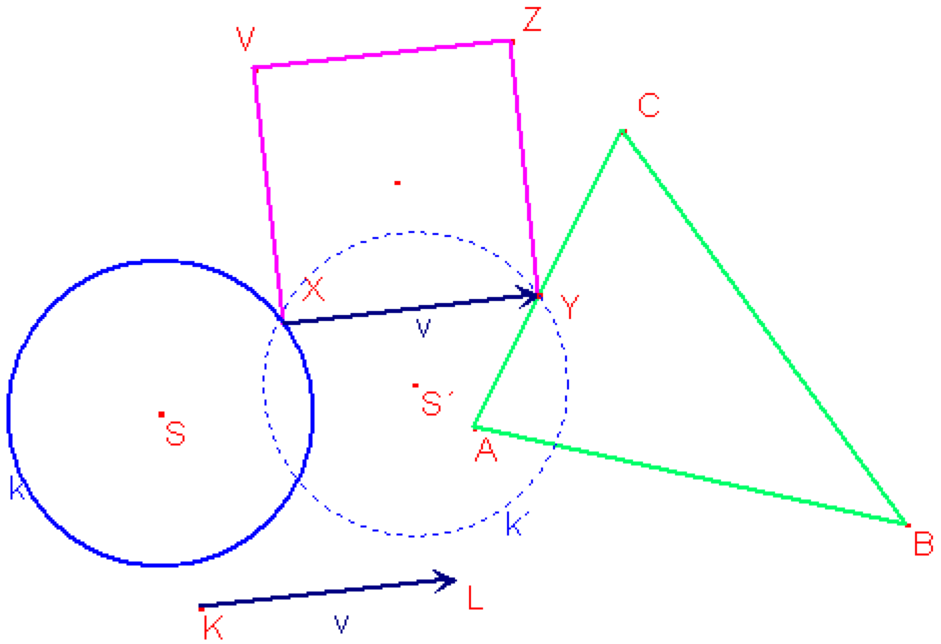


Náčrtek:



Rozbor:

Je zřejmé, že hledané body ***X*** a ***Y*** *j*sou ve vztahu vzor – obraz v posunutí daném orientovanou úsečkou ***KL***, ale každý leží na jiném objektu. Posuneme-li jeden objekt (kružnici ***k***) vektorem ***v*** **=** $\overrightarrow{KL}$**,** dostaneme v průsečíku obrazu kružnice ***k´*** a hranice trojúhelníku hledaný bod ***Y***. Bod ***X*** pak získáme inverzním posunutím.



Nyní již máme dva vrcholy hledaného čtverce, stačí doplnit body ***V*** a ***Z***, což je možné dvěma způsoby vzhledem k polorovině vymezené úsečkou ***XY***. Doporučuji, abyste si konstrukci sami detailně provedli a přitom se zamysleli nad **vzájemnou polohou zadaných objektů - jak souvisí s počtem řešení**

dané úlohy. Kružnice ***k´*** a hranice trojúhelníku ***ABC*** mohou mít buď **0, 1, 2,..** nebo až **6** průsečíků ***Y.*** (Načrtněte!) Každou úsečku ***XY*** lze dále doplnit na čtverec dvěma způsoby.

Při vaší volbě **zadání pro konstrukci** si uvědomte, že jsou zadány pouze následující objekty**:** úsečka ***KL***, kružnice ***k*** a trojúhelník ***ABC***. Body ***X*** a ***Y*** teprve hledáme.

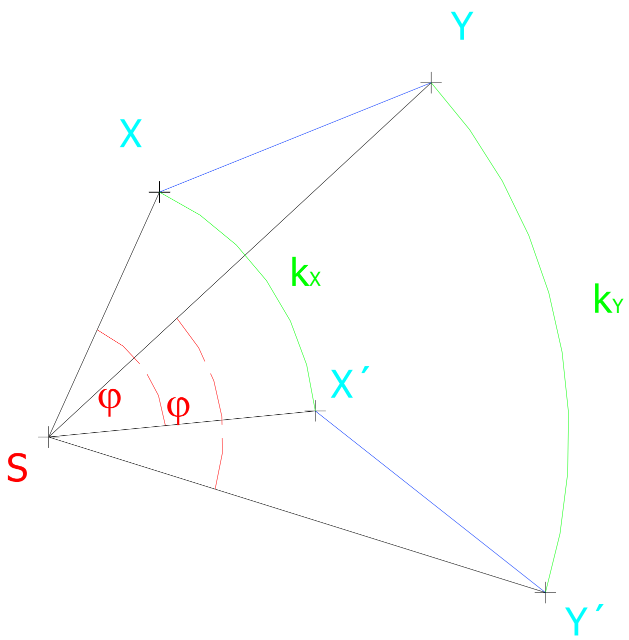
Další úlohy, které se řeší užitím posunutí, vás čekají v kapitole „Souhrnné úlohy řešené užitím shodných zobrazení“.

2.5 Otáčení

Otáčení, neboli **rotace,** je shodné zobrazení, které je dáno **středem otáčení *S* a orientovaným úhlem otáčení** φ. Bod ***X*** zobrazí na bod ***X´*** tak, že body ***X*** a ***X´*** leží na kružnici ***k(S, r = SX)*** – tzv. ***kružnici otáčení bodu X***, přičemž orientovaný úhel ***XSX´*** má velikost φ.

Symbolický zápis: $R(S,\varphi): X \to X'$

Zobrazení bodu a úsečky v rotaci R(S,φ):

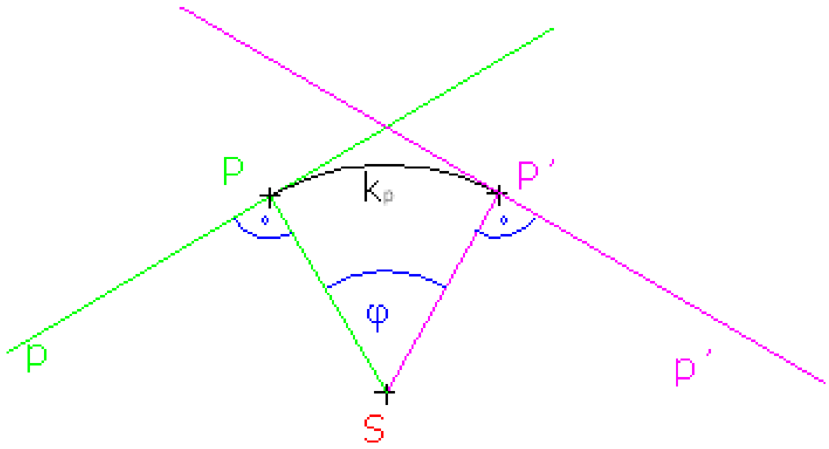


V obrázku je použita rotace se středem ***S*** a orientovaným úhlem $\varphi =$ **– 60°.**

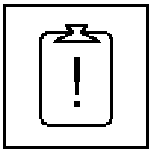
Postup konstrukce obrazu *X´*:
Nejprve sestrojíme polopřímku procházející bodem ***S***, která s průvodičem bodu ***X*** – úsečkou ***SX*** – svírá úhel $\varphi = -60°$ (záporný směr otáčení !). Tuto polopřímku protneme kružnicí k_X, která má střed ***S*** a poloměr ***SX***. V průsečíku polopřímky a kružnice je hledaný bod ***X´***. Obdobně postupujeme u bodu ***Y´*.**

Zobrazení přímky v rotaci R(S,φ):

a) Přímku, která neprochází bodem ***S*** můžeme pochopitelně zobrazit tak, že otočíme její dva libovolné body. Efektivnější je ovšem způsob, kdy přímku při rotaci uchopíme za jediný bod – za patu kolmice ***P*** spuštěné ze středu rotace ***S*** na tuto přímku. Otočíme pak pouze tento její průvodič ***SP*** do polohy ***SP´*** a obraz přímky doplníme jako kolmici k otočenému průvodiči.



b) Pro přímku, která prochází bodem *S*, stačí provést otočení jediného dalšího bodu. Obraz přímky musí opět procházet *S*.



Zapisujeme:

$$R(S,\varphi): p \rightarrow p'$$

Speciální případy rotace:

1) Rotace o úhel ±(2k+1).180°, k∈N je středová souměrnost. (Načrtněte!)
2) Rotace o úhel ±k.360°, k∈N je identické zobrazení (každý útvar je samodružný).

Útvary samodružné v rotaci (vyjma výše uvedených specifických případů) jsou kružnice, jejichž středem je střed otáčení *S*, kruhy a mezikruží se stejnou vlastností, dále například pravidelné mnohoúhelníky středově souměrné podle *S*, pokud úhel rotace je přirozeným násobkem středového úhlu jejich hrany apod.

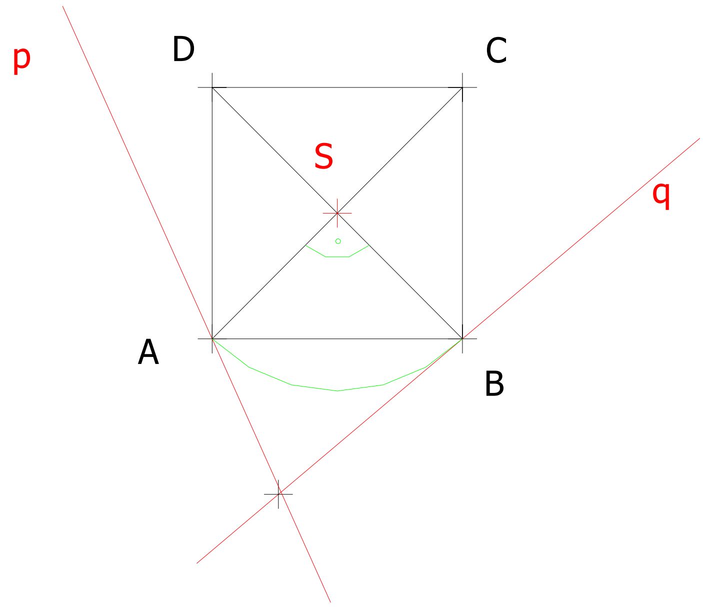
Ukážeme si nyní několik úloh, kde se jako princip řešení uplatní rotace.

Př. r1: Jsou dány různoběžky *p* a *q* a uvnitř jejich úhlu bod *S* (ne ovšem na ose úhlu). Sestrojte všechny čtverce *ABCD* takové, že bod *S* je jejich středem a bod *A* přitom leží na přímce *p* a bod *B* leží na přímce *q*.

Poznámka k náčrtku:

Než se společně pustíme do náčrtku, uvědomte si, že opět nastala situace, kdy máte sestrojit čtverec do zadaných objektů, což bývá někdy obtížné. Začnu proto kresbou čtverce ***ABCD*** a pak podle zadání dokreslím zadané objekty – tj. přímky ***p*** a ***q*** a bod ***S***. Nad náčrtkem budeme uvažovat, jak od zadaných objektů přejít ke hledaným. Doporučuji použít při náčrtku barevné odlišení.

Náčrtek a rozbor:



Povšimněte si, že vrcholy hledaného čtverce, body ***A*** a ***B***, leží na čtvrtkružnici se středem v bodě **S**. Přecházejí tedy jeden na druhý v rotaci se středem ***S*** a úhlem ± **90°.** Neznáme zatím jejich polohu, ale víme, na kterých objektech leží. Otočíme-li přímku ***p*** kolem ***S*** o 90°, protne nám její obraz ***p´*** přímku ***q*** v bodě ***B***, protože platí:

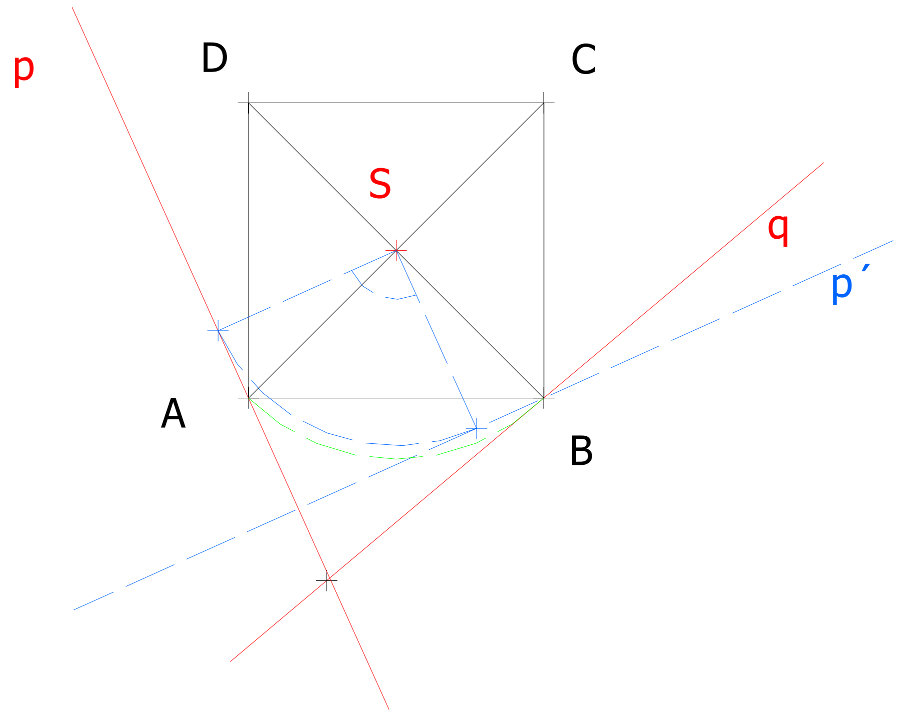
$$R(S,90°): A \to B$$
$$R(S,90°): p \to p´$$
.

A z toho už přímo vyplývá postup konstrukce. Jen dodejme, že ***A*** dostaneme z ***B*** inverzní rotací a úsečku doplníme na požadovaný čtverec se středem ***S***.

Postup konstrukce:

1) $p´; R(S,90°): p \to p´,$
2) $B; B \in p´ \cap q,$
3) $A; R(S,-90°): B \to A,$
4) *čtverec ABCD.*

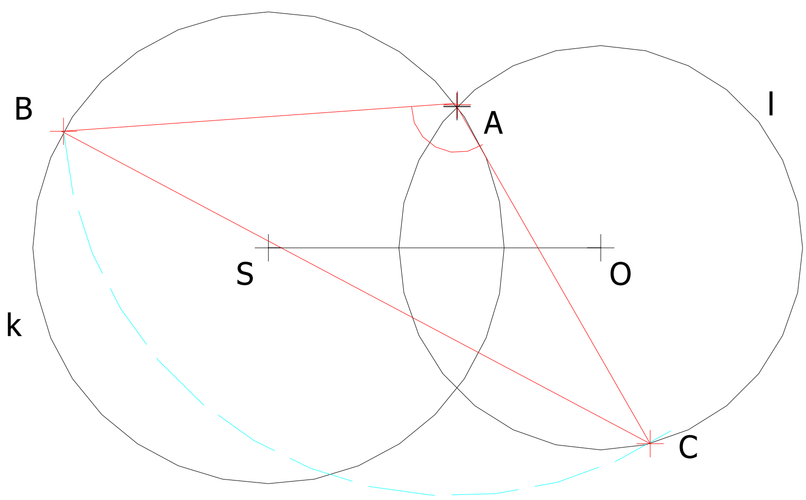
Konstrukce:



Další řešení má úloha v polorovině opačné vzhledem k přímce ***AB***.

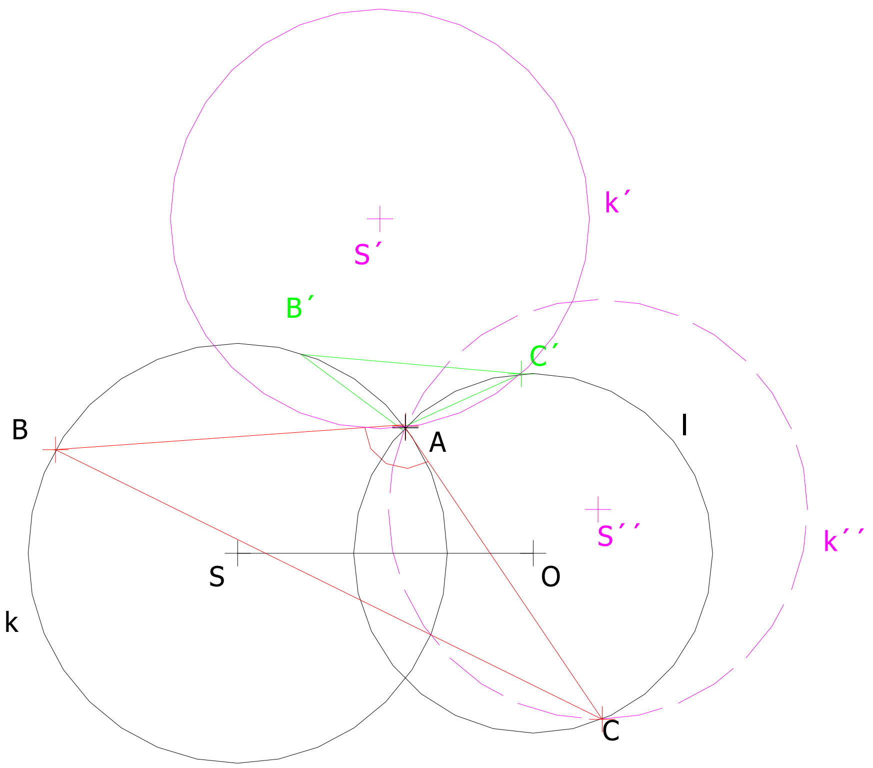
Př. r2: Jsou dány dvě protínající se kružnice *k* a *l* s různými poloměry. Jeden jejich společný bod označme *A*. Sestrojte všechny rovnoramenné trojúhelníky *ABC* s hlavním vrcholem *A*, |∡*A*| = 120° tak, aby vrchol *B* ležel na kružnici *k* a vrchol *C* ležel na kružnici l.

Náčrtek a rozbor:



Je zřejmé, že body ***B*** a ***C*** leží na kružnici se středem v bodě ***A*** a poloměrem ***r = AB = AC***, přičemž velikost úhlu ***BAC*** je **120°**. Tuto skutečnost můžeme interpretovat tak, že bod ***B*** přejde do bodu ***C*** při otočení v rotaci se středem ***A*** a úhlem **+120°**. Nemáme k dispozici ani bod ***B*** ani bod ***C***, máme ovšem kružnice, na kterých mají ležet. Zobrazíme-li v rotaci **R(*A*,+120°)** danou kružnici

k, zobrazí se do takové kružnice, která protne druhou kružnici – kružnici ***l*** – v hledaném bodě ***C***. Bod ***B*** pak můžeme získat inverzní rotací.
Další řešení úlohy získáme užitím rotace **R(*A*, -120°).** Pozorně prostudujte **následující konstrukci** a obě řešení si sami vyrýsujte.



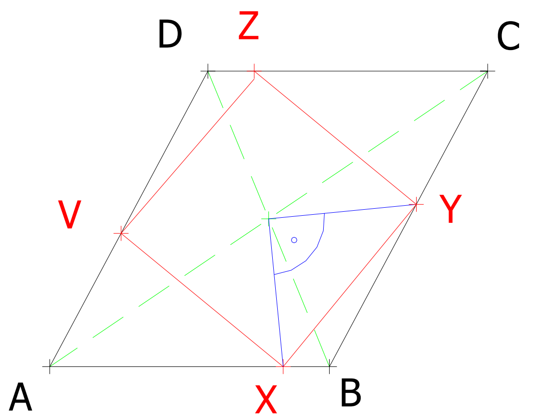
Postup konstrukce:

1) k'; $R(A,-120°): k \to k'$
2) C'; $C' \in l \cap k'$
3) B'; $R(A,+120°): C' \to B'$
4) $\Delta AB'C'$

Další řešení dostaneme užitím inverzní rotace, která převádí kružnici ***k*** na ***k´´***:
$R(A,+120°): k \to k''$

Př. r3: Do daného rovnoběžníku vepište čtverec tak, aby jeho vrcholy ležely každý na jiné straně rovnoběžníku.

Rozbor:



Z náčrtku je patrné, že v hledaném čtverci ***XYZV*** přejde např. vrchol ***X*** do vrcholu ***Y*** v **otočení o 90°** kolem společného středu rovnoběžníku a hledaného čtverce. Všechny vrcholy musí přitom ležet na hranici rovnoběžníku. Principem řešení uvedené úlohy bude proto **rotace o +90°, resp. –90°, se středem ve středu rovnoběžníku.**

Postup konstrukce:

1) $S;\ S\ je\,střed\ \ ABCD,$

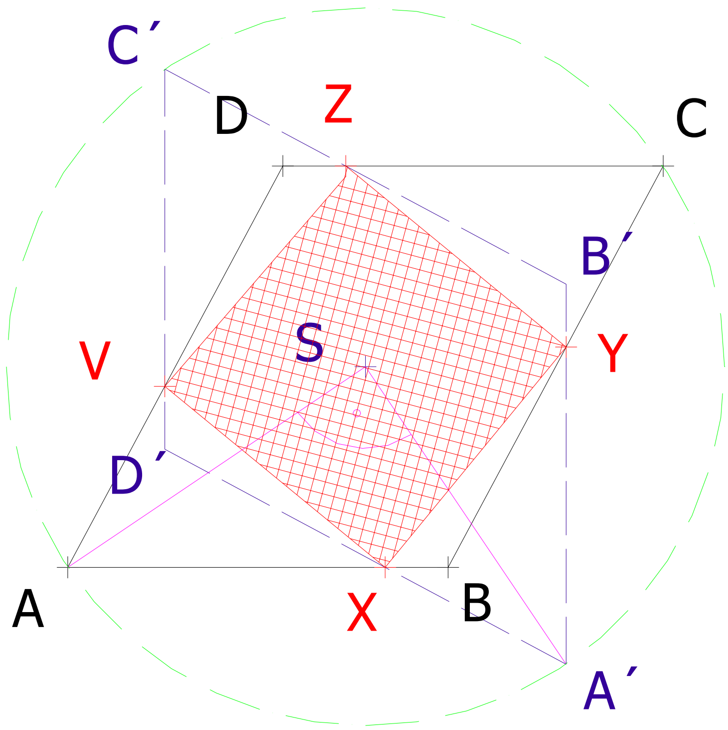
2) $h = AB \cup BC \cup CD \cup DA = hranice\,rovnoběžníku,$

3) $h';\ R(S,\pm 90°): h \to h'\ (hranice\,otočeného\,rovnoběžníku),$

4) $X,Y,Z,V;\ \{X,Y,Z,V\} \subset h \cap h',$

5) $čtverec\,XYZV.$

Konstrukce:



Pozn.:
Daná úloha má jedno, nebo také žádné řešení. (Načrtněte takový případ.)

S dalšími úlohami řešenými užitím otáčení se setkáte v následující kapitole.

2.6 Souhrnné úlohy řešené užitím shodných zobrazení

Tato kapitola je velice důležitá. Je určena k tomu, abyste si v ní **sami** procvičili právě probranou látku. U zadání úloh jsou uvedeny **hypertextové odkazy** na stránky **s nápovědou** a následně i **s řešením úlohy**, nebo alespoň návodem k jejímu řešení. Než se do souhrnných úloh pustíte, přečtěte si několik dobře míněných rad:

Nejprve si vždy **pozorně pročtěte zadání**. Má-li být řešením jednoduchý objekt – např. úsečka, pusťte se hned do náčrtku. V náčrtku si vždy odlišně označte objekty, které jsou dány a jinak objekty, které máte nalézt. Pokud má být řešením složitější objekt, **začněte náčrtek zhotovovat právě od hledaného objektu** a zadané prvky dokreslete až pak. A opět **odlište barevně, co je dáno a co hledáte**.

Je-li náčrtek hotov, **hledejte shodné zobrazení**, které pomůže danou úlohu vyřešit. Všímejte si vlastností hledaného objektu, hledejte případné souměrnosti, všímejte si, zda některé body nepřecházejí jeden v druhý např. v posunutí nebo v otočení. Vaši úvahu před vlastní konstrukcí prověřte náčrtkem možných řešení.

Bude-li to potřeba, vyhledejte **nápovědu**, na závěr si zkontrolujte správnost svého postupu řešení.

Úloha 1: **Je dána kružnice *k* (*S*; 3,5cm) a jeden její vnitřní bod *X* takový, že I*SX*I = 2,5 cm. Sestrojte všechny tětivy kružnice *k*, které procházejí bodem *X* a mají délku 5,5 cm.**

NÁPOVĚDA ŘEŠENÍ

Úloha 2: **Je dána dvojice rovnoběžek *a* II *b* a bod *M* uvnitř pásu těchto rovnoběžek (ne na ose pásu). Sestrojte všechny kružnice *k*, které procházejí bodem *M* a dotýkají se obou daných přímek.**

NÁPOVĚDA ŘEŠENÍ

Úloha 3: **Na kulečníku jsou umístěny dvě koule v místech označených *A* a *B* . Dopravte kouli z místa *A* do místa *B* odrazem: a) o dva sousední mantinely; b) o dva protilehlé mantinely.** (Zadání volte obdobně jako v příkladu 1 v kapitole 2.2, úlohu řešte ve schematickém zjednodušení: koule = bod.)

NÁPOVĚDA ŘEŠENÍ

Úloha 4: **Je dán ostrý úhel *AVB* a uvnitř něj (ne na ose úhlu) bod *M*. Sestrojte všechny takové úsečky, které mají krajní body na ramenech daného úhlu a jsou bodem *M* půleny.**

NÁPOVĚDA ŘEŠENÍ

Úloha 5: **Je dána dvojice rovnoběžek *a* II *b* a bod *C* neležící na žádné z nich. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky *ABC*, pro které platí, že bod *A* leží na přímce *a* a bod *B* leží na přímce *b*.**

NÁPOVĚDA ŘEŠENÍ

Úloha 6: **Jsou dány dvě protínající se kružnice *k* a *l*, které mají různé poloměry. Sestrojte takovou přímku procházející jedním jejich společným bodem, která vytíná na obou kružnicích stejně dlouhé tětivy.**

NÁPOVĚDA ŘEŠENÍ

Úloha 7: **Je dána kružnice *k*, přímka *p* a trojúhelník *KLM*, přičemž kružnice *k* a trojúhelník *KLM* leží v opačných polorovinách vzhledem k přímce *p*. Sestrojte všechny pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky *ABC* s pravým úhlem při vrcholu *C*, pro které platí, že přímka *p* je jejich osou souměrnosti a že bod *A* leží na kružnici *k* a bod *B* leží na hranici trojúhelníku ABC. Proveďte diskusi počtu řešení dané úlohy.**

NÁPOVĚDA ŘEŠENÍ

Úloha 8: **Sestrojte rovnoběžník *ABCD*, jsou-li dány velikosti jeho stran: *a* = 5 cm, *b* = 3 cm a velikost úhlu *ASB* sevřeného úhlopříčkami je $\varepsilon = |\sphericalangle ASB|$ = 135°. (S je střed rovnoběžníku).**

NÁPOVĚDA ŘEŠENÍ

Úloha 9: **V soustavě souřadné O(x,y) je dán bod *A*[3,2] (jednotka = 1 cm). Na ose *x* sestrojte takový bod *Q*, aby lomená čára *OQA* měla délku 8 cm.**

NÁPOVĚDA ŘEŠENÍ

Úloha 10: **Je dána kružnice *k* (*S*,*r*) s tečnou *t* a dotykovým bodem *T*. Ve stejné polorovině s hraniční přímkou *t*, jako leží kružnice *k*, zvolte bod *M*. Sestrojte úsečku, která má jeden krajní bod na kružnici *k*, druhý na přímce *t* a je přitom půlena bodem *M*. Proveďte diskusi úlohy – tj. stanovte počet řešení v závislosti na poloze bodu *M*.**

NÁPOVĚDA ŘEŠENÍ

Úloha 11: **Je dána kružnice *k* (*S*,*r*), přímka *p* a délka *d* ($d \in R^+$). Sestrojte takovou tětivu kružnice *k*, aby byla rovnoběžná s přímkou *p* a aby její délka byla *d*.**

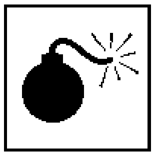
NÁPOVĚDA ŘEŠENÍ

Poznámka:
Další úlohy k procvičení tématu naleznete v literatuře uvedené v seznamu na konci této opory.

2.7 Nápověda k řešení úloh

Nápověda k řešení úlohy 1:

Sestrojte libovolnou tětivu dané kružnice, která má danou délku 5,5 cm.(Jeden bod zvolíte, další nanesete kružítkem.) Pak přemýšlejte, jak přemístit tětivu mající krajní body na obvodu kruhu tak, aby procházela bodem *X*.



ŘEŠENÍ

Nápověda k řešení úlohy 2:

Uvědomte si, kde leží středy všech kružnic, které se dotýkají současně obou dvou rovnoběžek a pak si jednu takovou sestrojte. Nebude sice procházet bodem *M*, ale můžete přijít na to, jakým způsobem ji (je) do bodu *M* přemístit.

ŘEŠENÍ

Nápověda k řešení úlohy 3:

Snažte se v obou případech rozvinout dráhu kulečníkové koule do přímky. Užijte osovou souměrnost podle toho mantinelu, o který chcete, aby se koule odrazila.

ŘEŠENÍ

Nápověda k řešení úlohy 4:

Úsečka, kterou hledáme, má být středově souměrná podle bodu *M*. Je to tedy úloha na středovou souměrnost. Zobrazíme v ní to, co je dáno a kde mají ležet hledané body – tj. úhel *AVB*.

ŘEŠENÍ

Nápověda k řešení úlohy 5:

Uvědomte si, že bod *A* přejde v bod *B* v otočení se středem v bodě *C* o +60°nebo –60°. A ze zadání víte, na kterých objektech hledané body leží.

ŘEŠENÍ

Nápověda k řešení úlohy 6:

Průsečík kružnic je středem souměrnosti hledané tětivy.

ŘEŠENÍ

Nápověda k řešení úlohy 7:

Důležitá je v zadání zmínka o tom, že trojúhelník je osově souměrný – osová souměrnost s osou *p* je i principem řešení úlohy, převádí na sebe totiž neznámé body *A* a *B.*

ŘEŠENÍ

Nápověda k řešení úlohy 8:

Přeneste si rovnoběžným posunutím po úhlopříčce *AS* úhel *ASB* tak, aby měl vrchol v bodě *C*. Co vymezí ramena posunutého úhlu na přímce *AB* ?

ŘEŠENÍ

Nápověda k řešení úlohy 9:

Délku lomené čáry je třeba napřímit – nejlépe na osu *x*.

ŘEŠENÍ

Nápověda k řešení úlohy 10:

Hledaná úsečka je středově souměrná podle bodu *M*. Zobrazíme proto ve středové souměrnosti se středem *M* objekt, na kterém má ležet jeden její krajní bod – nejlépe tečnu *t*.

ŘEŠENÍ

Nápověda k řešení úlohy 11:

Krajní body tětivy, kterou hledáme mají následující vlastnost: Jeden přejde do druhého posunutím ve směru přímky *p* o vektor délky *d*. A oba krajní body leží na dané kružnici. Co tedy asi posuneme v popsaném zobrazení?

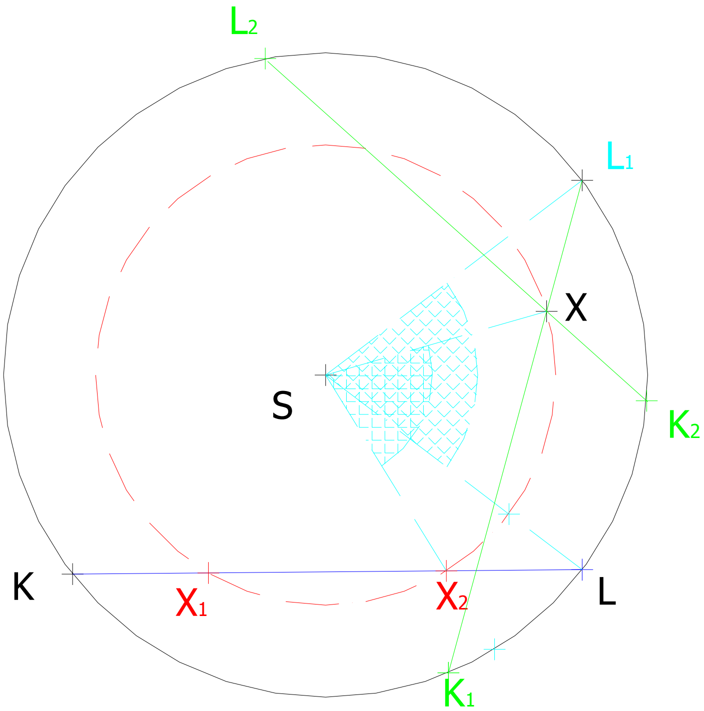
ŘEŠENÍ

2.8 *Řešení souhrnných úloh na užití shodných zobrazení*

Řešení úlohy 1: ZPĚT NA ZADÁNÍ

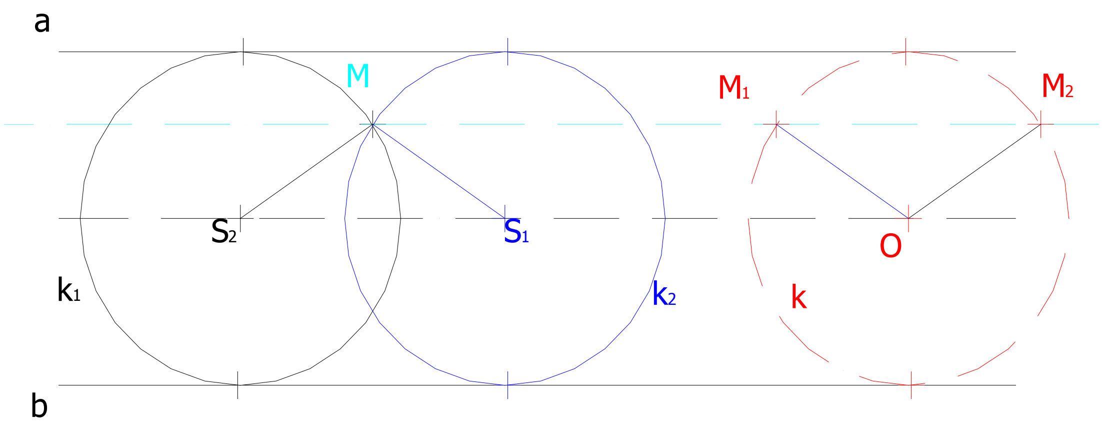
Bod ***X*** je třeba otočit po kružnici kolem daného bodu ***S*** tak, až se přemístí na zvolenou tětivu. Úhel φ, o který se otočí bod ***X,*** určí inverzní rotaci **R(*S*,-φ),** pomocí níž pak otočíme krajní body zvolené tětivy. Druhé řešení je pak symetrické podle osy ***SX***.

Konstrukce:



Řešení úlohy 2: ZPĚT NA ZADÁNÍ

Sestrojíme jednu kružnici ***k*** dotýkající se přímek ***a*** i ***b*** - má střed ***O*** na ose pásu ***a, b.*** Bodem ***M*** vedeme rovnoběžku ***m*** s přímkami ***a, b,*** která protne kružnici ***k*** ve dvou bodech M_1 a M_2. Hledané kružnice jsou pak obrazem kružnice ***k* v posunutí** daném orientovanými úsečkami M_1M (resp. M_2M). Středy hledaných kružnic vyhledáme **rovnoběžným posunutím poloměru** M_1O (resp. M_2O) do bodu ***M.***

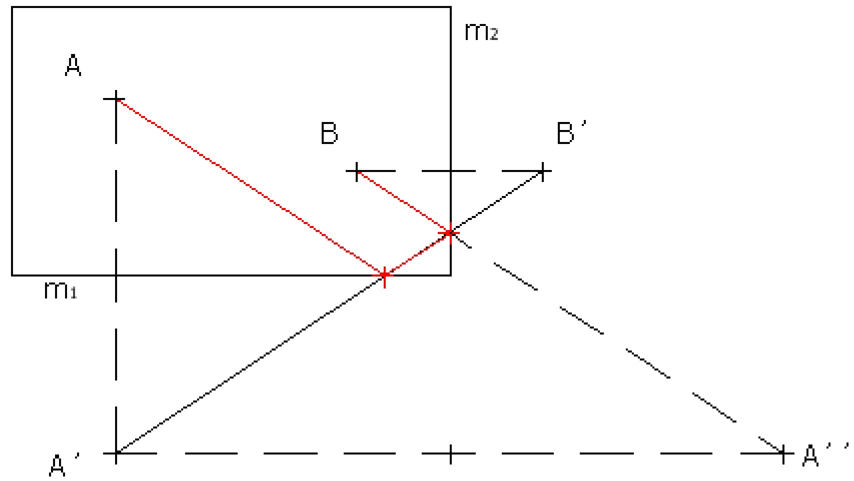


Pozn.:
Úlohu je též možné řešit užitím kružnice se středem v bodě ***M*** a poloměrem rovným polovině šířky pásu rovnoběžek.

Řešení úlohy 3: **ZPĚT NA ZADÁNÍ**

Konstrukce je patrná z následujících obrázků. Uvědomte si, že používáte skládání osových souměrností – na výsledek zobrazení v jedné osové souměrnosti aplikujete další osovou souměrnost.

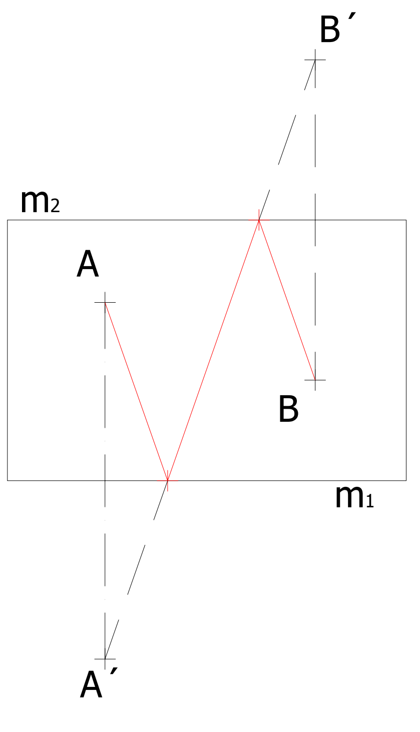
a) odraz o dva sousední mantinely:



Můžete postupovat dvojím způsobem:
1) ***O(m₁)***: ***A*** → ***A´***; ***O(m₂)***: ***A´*** → ***A´´***; napřímená trasa je ***BA´´*** - je nalezen bod odrazu na mantinelu $\boldsymbol{m_2}$, stačí jej spojit s ***A´*** a získáme bod odrazu na $\boldsymbol{m_1}$,

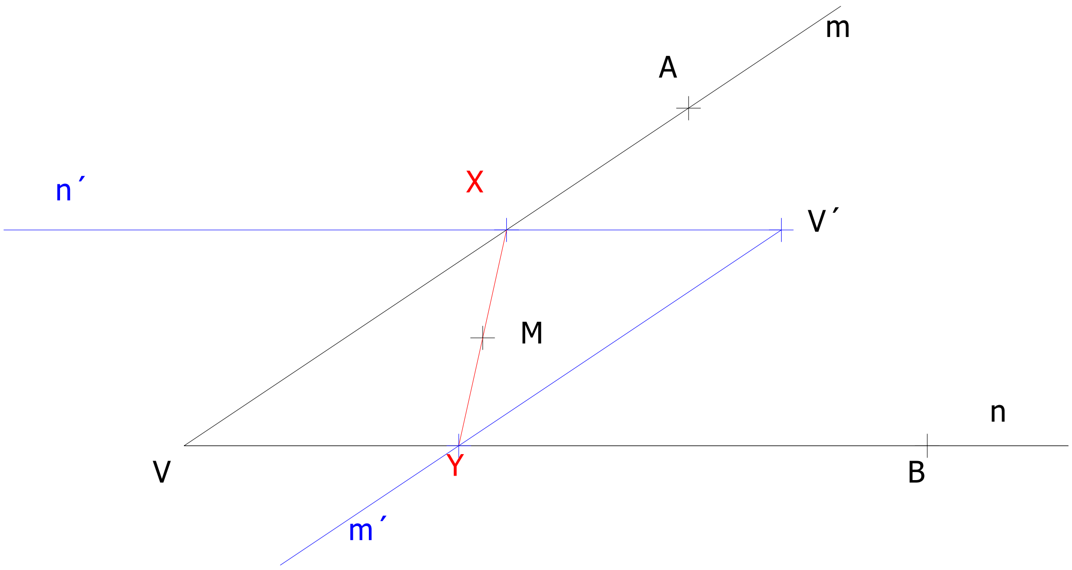
2) ***O(m₁)***: ***A*** → ***A´***; ***O(m₂)***: ***B´*** → ***B´***; napřímená trasa je ***A´B*** – na ní leží body odrazu na obou mantinelech.

b) odraz o dva protilehlé mantinely:
Dráha kulečníkové koule je napřímena do úsečky ***A´B´***. Spojnice těchto bodů vymezí na mantinelech body odrazu.



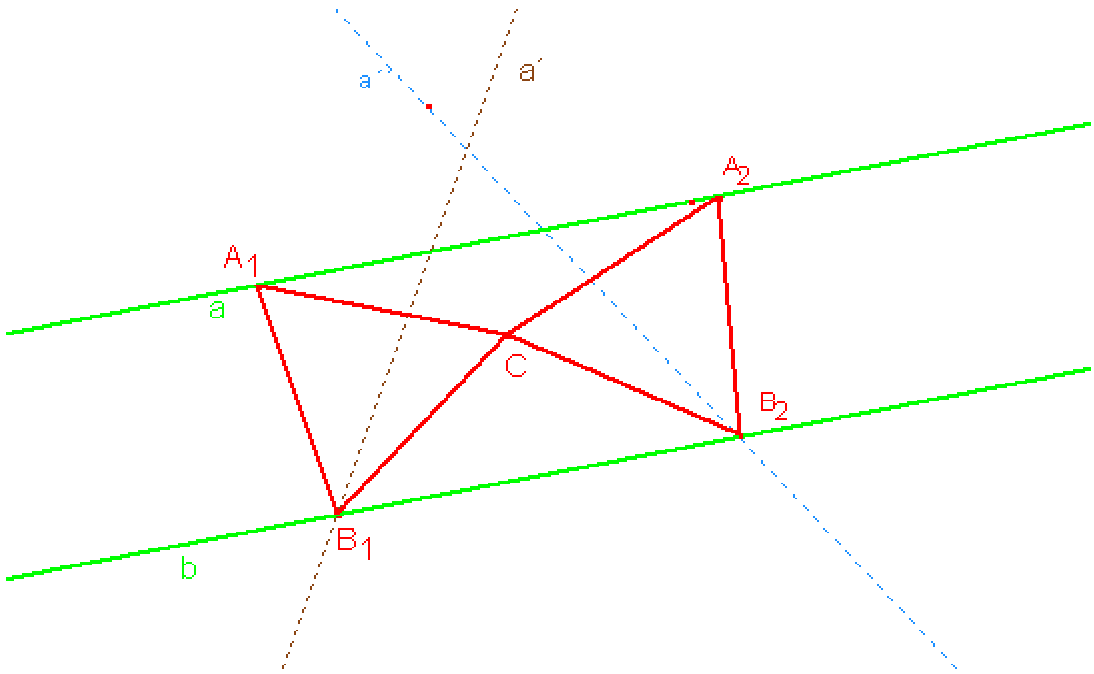
Řešení úlohy 4: ZPĚT NA ZADÁNÍ

Princip: $S(M): \angle AVB \to \angle A'V'B'$.
V průsečících vzoru a obrazu leží hledané body.



Řešení úlohy 5: ZPĚT NA ZADÁNÍ

Princip: $R(C;\varphi=60°): A \to B$, ale také $R(C;\varphi=60°): a \to a'$ a bod *B* leží pak v průsečíku obrazu *a´* a přímky *B*. Bod *A* získáte inverzní rotací.



Poznámka:
Pokud na detaily konstrukce nemůžete přijít ani nyní, zopakujte si, jak se otáčí přímka! („Uchopte“ ji za kolmý průvodič!)

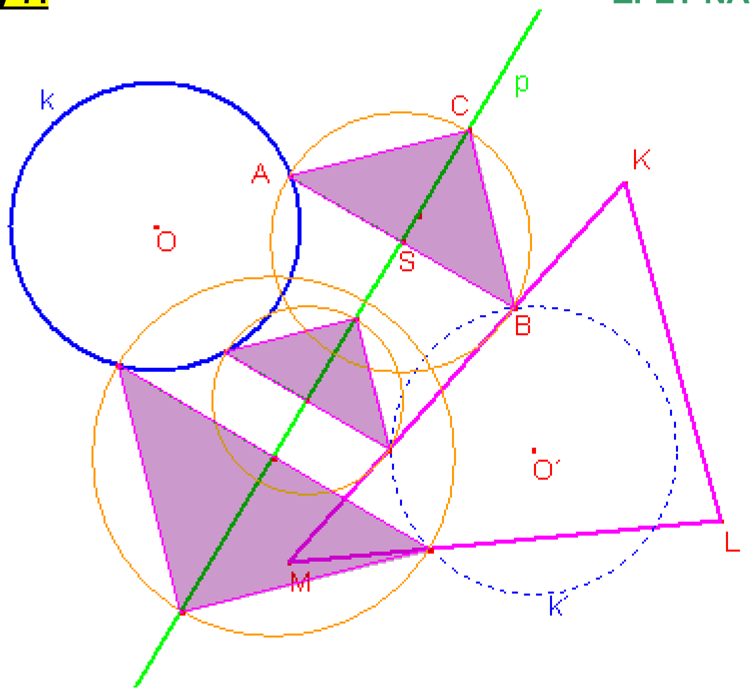
Řešení úlohy 6: ZPĚT NA ZADÁNÍ

Označme společný bod kružnic jako *A.*
Princip a postup řešení úlohy:

$$S(A): k_1 \to k_1{}'; \quad Y \in k_1{}' \cap k_2; \quad S(A): Y \to X\,.$$

Hledaná tětiva je *XY.* Konstrukce je snadná, proveďte ji sami.

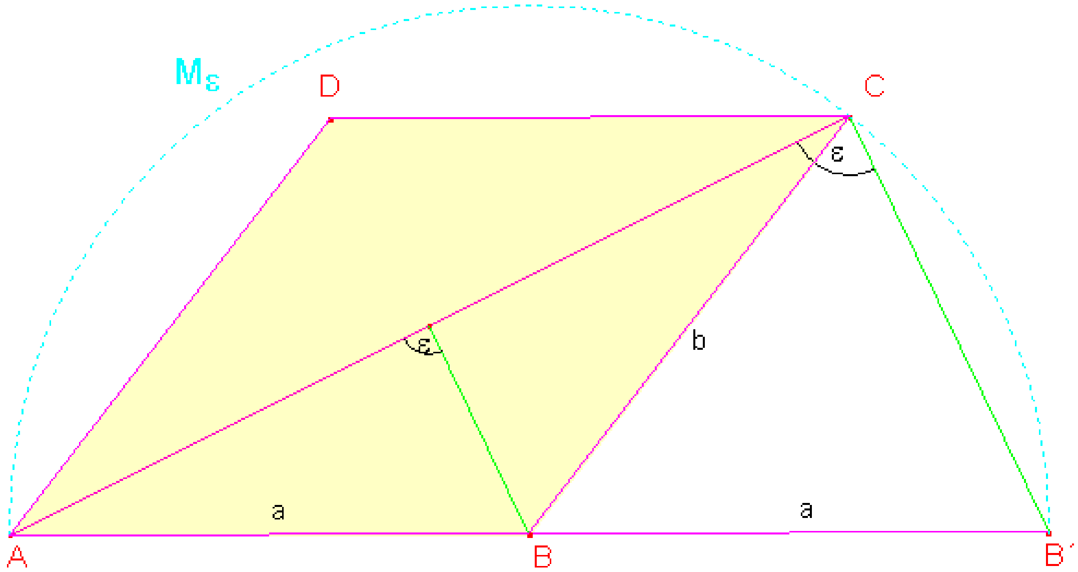
Řešení úlohy 7: ZPĚT NA ZADÁNÍ



Na obrázku je konstrukce 3 ze 6 vycházejících řešení. Kružnice *k* je zobrazena v osové souměrnosti s osou *p*. Sami si načrtněte případy dokládající existenci 0, 1, …8 řešení. Na čem počet řešení závisí ?

Řešení úlohy 8: ZPĚT NA ZADÁNÍ

Zřejmě jste sami nebo po nápovědě zjistili, že za bod *B* se na polopřímku *AB* posune úsečka o velikosti strany *a*. Sestrojujeme tedy trojúhelník, který má stranu délky *2a*, jeho těžnice na tuto stranu má délku *b* a proti této straně leží úhel o velikosti ε. Musíme tedy nad úsečkou délky *2a* sestrojit množinu bodů, z nichž vidíme tuto úsečku pod úhlem ε. Pokud jste to již zapomněli, nezbývá, než se vrátit k prvnímu dílu této opory.
Při konstrukci se můžete opřít o následující obrázek:



Řešení úlohy 9: ZPĚT NA ZADÁNÍ

V bodě 8 osy x si vyznačte bod A´. Trojúhelník AQA´je rovnoramenný a hledaný bod Q je jeho hlavním vrcholem. Nalezneme ho na ose souměrnosti úsečky AA´. Konstrukci jistě zvládnete snadno sami.

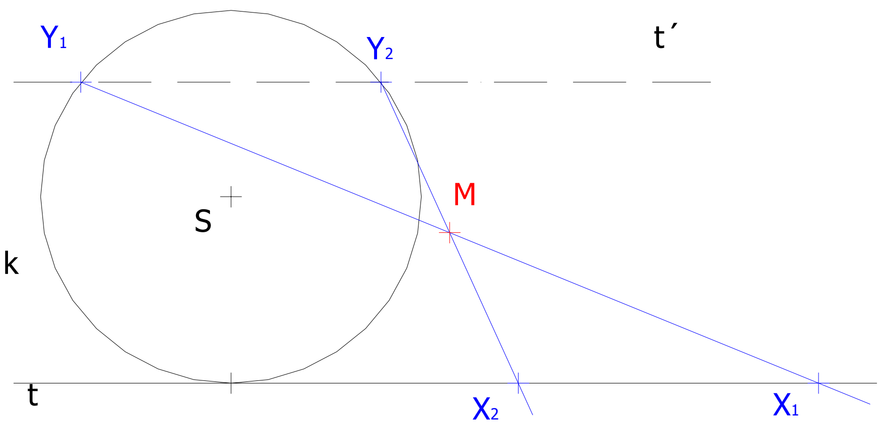
Řešení úlohy 10: ZPĚT NA ZADÁNÍ

Tečnu zobrazíme ve středové souměrnosti se středem *M.*

$$\boxed{S(M) : t \to t' ;\ \ t' \cap k = \{Y\}\ \ S(M) : Y \to X}$$

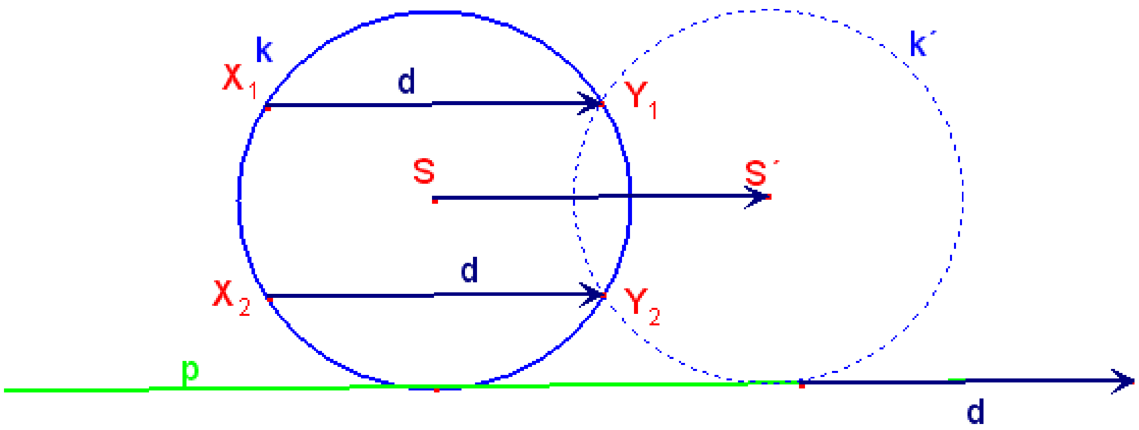
Průsečíky obrazu tečny s kružnicí budou krajními body hledané úsečky. Počet řešení závisí evidentně na počtu průsečíků *t´*a *k.* Úloha má právě jedno řešení, pokud $|M,t| = r$, dvě řešení, pokud $|M,t| < r$. Úloha nemá řešení pro $|M,t| > r$. Načrtněte!

Konstrukce:



Řešení úlohy 11: **ZPĚT NA ZADÁNÍ**

V posunutí popsaném v nápovědě zobrazíme danou kružnici. Záleží pouze na směru a velikosti posunutí, nikoli na jeho orientaci.



Máte za sebou dvanáct podrobně komentovaných řešených příkladů a téměř stejný počet samostatně řešených úloh. Sami posuďte, nakolik jste byli nuceni použít nápovědu či autorské řešení. Pokud máte pocit, že byste potřebovali látku ještě více upevnit, doporučuji vám souhrnná cvičení na shodná zobrazení ve sbírce [2]: str. 79, úlohy 33 – 47.

My se budeme dále věnovat podobným zobrazením. Některé postupy a principy uplatňované v řešení úloh následující kapitoly vám budou připomínat to, co jste se v této opoře dosud naučili. Úspěšné zvládnutí kapitoly 2 je dobrou startovní čárou pro další poznatky.

3 Podobná zobrazení v rovině

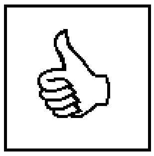
V této kapitole se dozvíte: *co je to podobné zobrazení, co je to stejnolehlost, jak se poznají vzájemně stejnolehlé útvary, jak se dá stejnolehlost použít ke konstrukcím objektů požadovaných vlastností.*

V této kapitole se naučíte: *zobrazit rovinný útvar v dané stejnolehlosti, použít stejnolehlostí v konstrukčních úlohách.*

Klíčová slova kapitoly: ***stejnolehlost neboli homotetie, střed stejnolehlosti, koeficient stejnolehlosti***

Čas potřebný pro prostudování kapitoly: *2 hodiny teorie + 5 hodin řešení úloh a provedení konstrukcí*

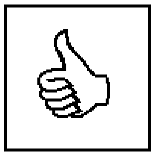
3.1 Podobné zobrazení, stejnolehlost



Podobné zobrazení (nebo také podobnost) v rovině je takové zobrazení, které každému bodu X roviny přiřadí bod X´ této roviny takovým způsobem, že **každý rovinný útvar se zobrazí na útvar s ním podobný** – tj. mající stejný poměr odpovídajících si úseček (**tzv. koeficient podobnosti**) a stejné úhly u odpovídajících si vrcholů.

Jsou-li v rovině dány dva podobné útvary, existuje podobné zobrazení, které převádí jeden na druhý. Je-li koeficient této podobnosti **k,** je koeficient inverzní podobnosti (tj. té, která převádí druhý na prvý) roven převrácené hodnotě **k,** tj. $\boxed{\frac{1}{k}}$.

Každé podobné zobrazení se dá získat složením shodných zobrazení a tzv. **stejnolehlosti.**



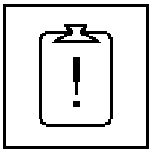
Stejnolehlost (neboli **homotetie**) se středem ***S*** a **koeficientem stejnolehlosti *k*; (*k*∈*R*, *k* ≠ 0)** je takové zobrazení v rovině, které každému bodu X roviny přiřadí bod X´ následujícím způsobem:

1) Bod *S* je samodružný,
2) Pokud k > 0, leží bod *X´* na polopřímce *SX* a platí: $|SX'| = k \cdot |SX|$,
3) Pokud k < 0, leží bod *X´* na polopřímce opačné k polopřímce *SX* a platí: $|SX'| = |k| \cdot |SX|$,

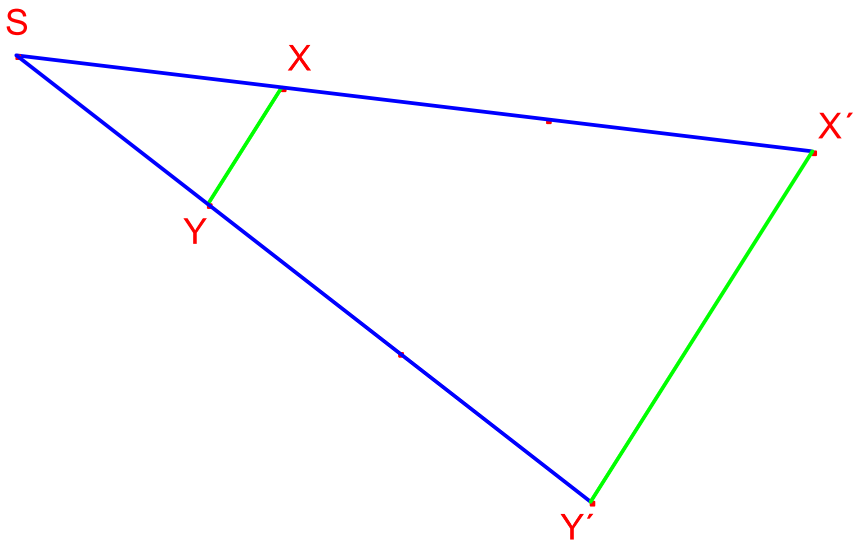
Zapisujeme: ***H(S,k): X→X´.***

Společně si teď tuto definici rozebereme, ukážeme si na jednoduchých příkladech, jak toto zobrazení funguje. Pro větší názornost budeme ve všech případech zobrazovat úsečku. Soustředíme se především na polohu obrazu a vzoru a na poměr jejich velikostí.

Př.h1: Danou úsečku *AB* (resp. daný trojúhelník *ABC*) zobrazte ve stejnolehlosti se středem *S* a koeficientem : a) k = 3; b) k = ½; c) k = - 2.

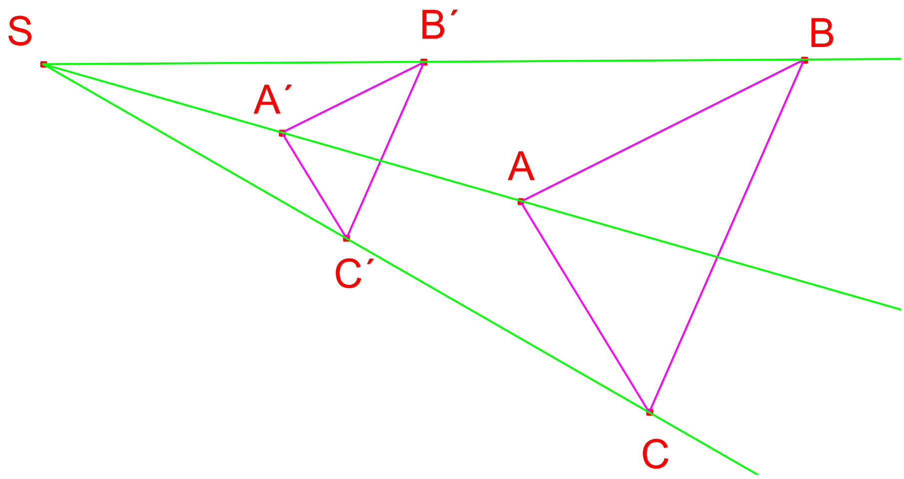


a) SX´ : SX = 3



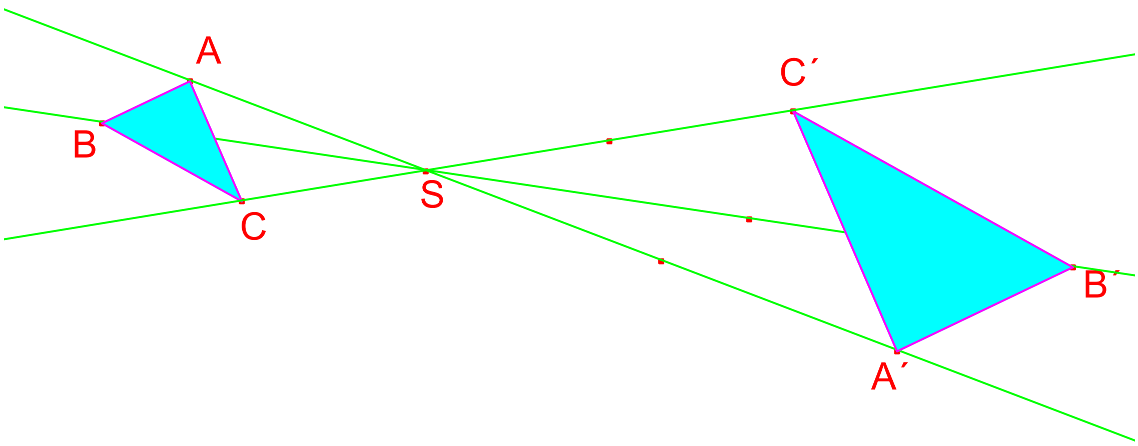
Vidíme, že došlo ke ZVĚTŠENÍ úsečky XY (protože k > 1)

b) SA´ : SA = 1 : 2



***Vidíme, že došlo ke ZMENŠENÍ úsečky AB (protože k < 1). Uvědomte si, že ačkoli se strany trojúhelníku ABC zmenšily na polovinu, OBSAH trojúhelníku ABC se zmenšil na čtvrtinu původního obsahu** (viz kapitola podobnost)*.

c) SA´ : SA = 2 : 1,



V tomto případě došlo ke ZVĚTŠENÍ stran trojúhelníku (protože |k| > 1), ale oproti dvěma předchozím případům jsou vzor a obraz umístěny na opačných polopřímkách s počátkem *S*.

Poznámka:

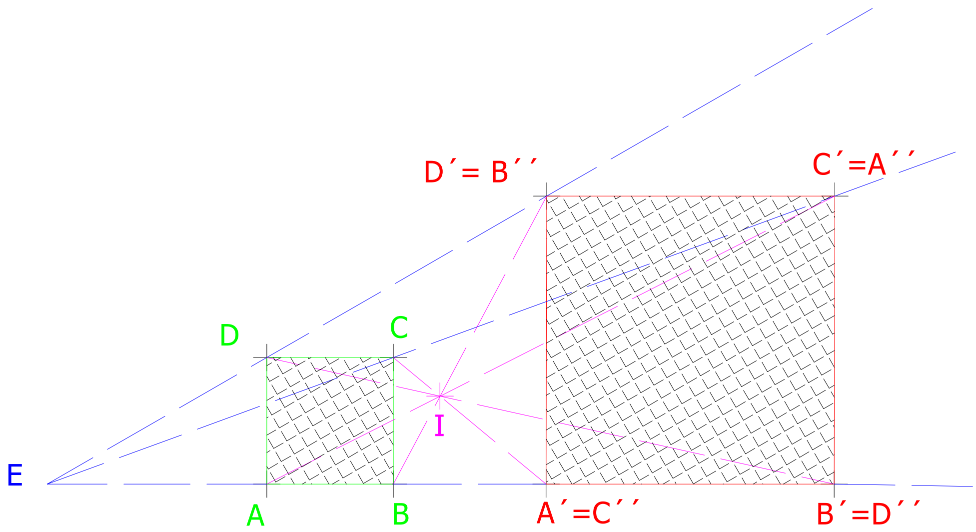
Jsou-li v rovině dány dva **podobné** útvary, které mají navíc všechny sobě **odpovídající si úsečky v rovnoběžné poloze,** lze je dvojím způsobem uvést do vztahu stejnolehlosti.
Je to: 1) stejnolehlost s tzv. **vnějším středem stejnolehlosti,**
2) stejnolehlost s tzv. **vnitřním středem stejnolehlosti.**

Tuto skutečnost budu ilustrovat na příkladu dvou daných čtverců s rovnoběžnými stranami. **Vnější** střed stejnolehlosti (mající **kladný** koeficient – Promyslete !) je označen ***E*** (externí). **Vnitřní střed stejnolehlosti** (mající **záporný** koeficient – promyslete !) je označen ***I*** (interní).

Značíme:
$$H(E):\ \check{c}tverec\ ABCD \to \check{c}tverec\ A'B'C'D'$$
$$H(I):\ \check{c}tverec\ ABCD \to \check{c}tverec\ A''B''C''D''$$

Platí tedy: 1) Pro koeficient *H(E,k)*: $k = \dfrac{|EA'|}{|EA|} > 0$,

2) Pro koeficient *H(I,k)*: $k = -\dfrac{|IA''|}{|IA|} < 0$,

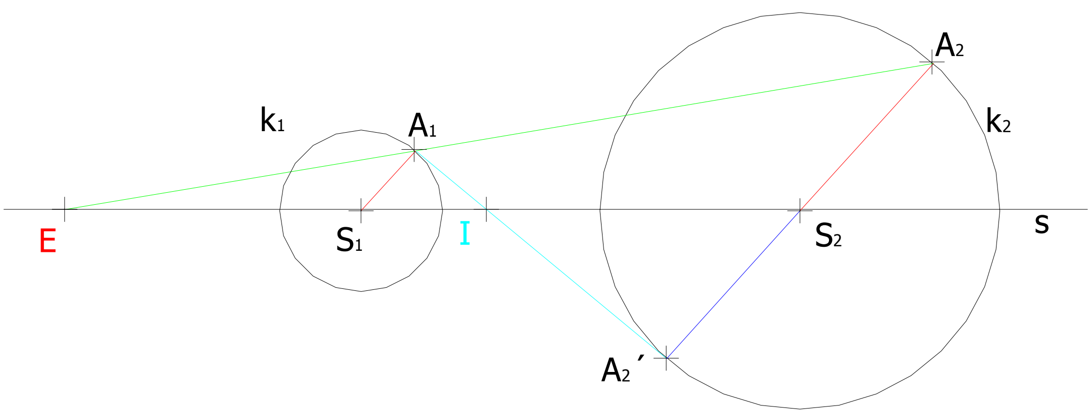


Poznámka:

Každé **dvě kružnice s různými poloměry** jsou vždy podobné a lze na nich vždy vyznačit vzájemně rovnoběžné poloměry. (Promyslete !) **Každé dvě kružnice lze tedy uvést dvojím způsobem do vztahu stejnolehlosti**. Mají-li stejnolehlé kružnice společné tečny, jsou tyto tečny ve stejnolehlosti samodružnými přímkami a procházejí středem stejnolehlosti. Středy stejnolehlosti (leží-li ve vnějších oblastech obou kružnic) jsou tudíž body, jimiž procházejí **společné tečny daných kružnic**.

Vše bude zřejmější poté, co zvládnete následující příklad:

Př. h2: Sestrojte středy stejnolehlosti daných dvou kružnic $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$. Řešte pro: a) $|S_1S_2| > r_1 + r_2$, b) $|S_1S_2| = r_1 + r_2$.



a) Rozbor a postup konstrukce:

V jedné z kružnic si označíme libovolný poloměr (zde S_1A_1) a v druhé kružnici sestrojíme poloměr s ním rovnoběžný (zde S_2A_2). Tyto úsečky si odpovídají ve stejnolehlosti s vnějším středem stejnolehlosti E a **kladným** koeficientem rovným podílu jejich velikostí. Střed stejnolehlosti – bod E – musí ležet tedy tam, kde se protínají spojnice vzoru a obrazu, tj. přímky: $\leftrightarrow A_1A_2$ a $\leftrightarrow S_1S_2$ (tzv. **„středná“**).

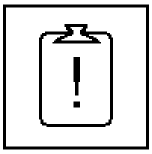
Ve výše uvedeném postupu je použit v druhé kružnici poloměr S_2A_2, přičemž úsečky S_1A_1 a S_2A_2 mají souhlasnou orientaci. Vznikne tak bod E.
Použijeme-li místo poloměru S_2A_2 opačně orientovanou úsečku $A_2{'}S_2$, vznikne uvedeným postupem bod I. Stejnolehlost se středem I má **záporný** koeficient.

Poznámka:
Snadno nahlédnete, že stejnolehlosti převádějící na sebe dvě kružnice jsou vlastně čtyři, záleží na tom, kterou z kružnic pokládáme za vzor a kterou za obraz:

$$H\left(E,\frac{S_2A_2}{S_1A_1}\right);\quad H\left(E,\frac{S_1A_1}{S_2A_2}\right);\quad H\left(I,-\frac{S_2A_2}{S_1A_1}\right);\quad H\left(I,-\frac{S_1A_1}{S_2A_2}\right)$$

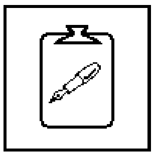
Promyslete !

b) Zadané kružnice mají vnější dotyk. Bod E sestrojíme jako v úloze a), bod I je dotykovým bodem.

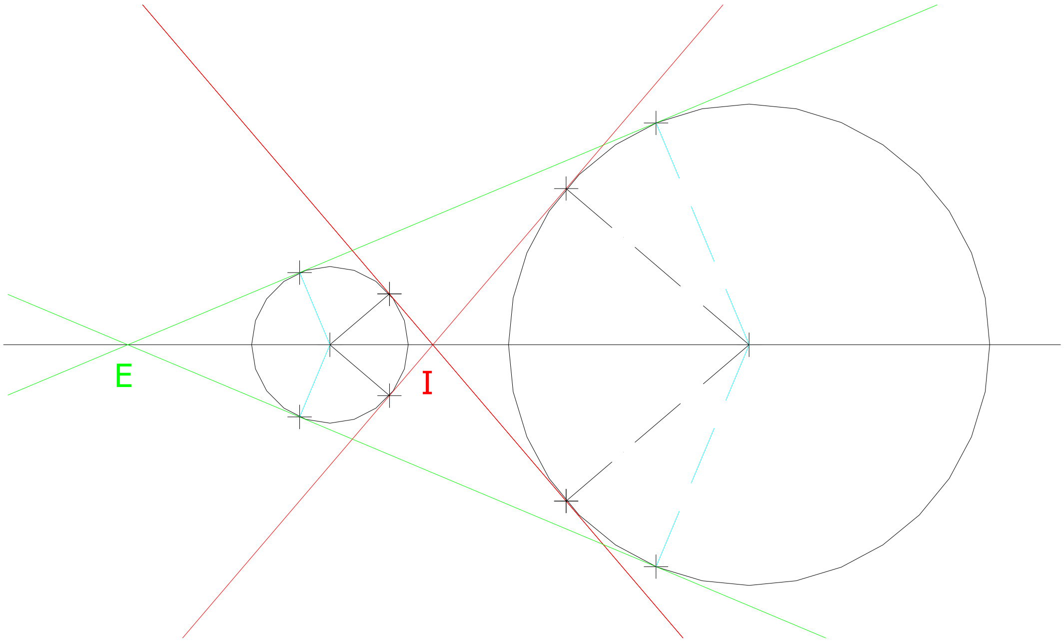


Úkol nalézt **společné tečny daných dvou kružnic** je úlohou navazující na právě vyřešenou úlohu. Nejprve sestrojíte body E a I a pak z nich vedete tečnu k jedné ze zadaných kružnic (užitím Thaletovy kružnice!). Tato tečna je pak i tečnou druhé kružnice. Úloha „vést společné tečny“ by měla pro zadání podle příkladu 2 v případě a) čtyři řešení – ***viz následující obrázek***, v případě b) 3 řešení.

Poznámka:



Podrobněji tuto problematiku naleznete v [1], kapitola 3.8.

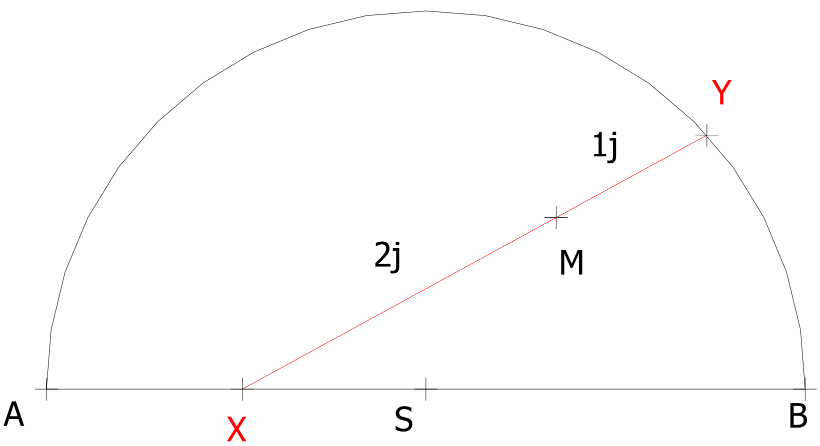


3.2 *Užití stejnolehlosti k řešení konstrukčních úloh*

Ukážeme si teď nejčastější případy konstrukčního využití stejnolehlosti. Příklady, ve kterých se využívá stejnolehlost, často obsahují podmínku o poměru velikostí některých úseček. Jsou to např. **úlohy o příčkách útvarů** – tj. úsečkách majících krajní body na hranici útvaru, přičemž je požadováno, aby tyto úsečky procházely daným bodem a byly jím děleny v předem daném poměru. Nebo to mohou být úlohy o konstrukcích rovinných obrazců – např. trojúhelníků, kde jsou zadány **poměry stran** nebo takový počet úhlů, že dokážeme sestrojit **obrazec podobný** tomu, který hledáme. Ke zvětšení, resp. zmenšení obrazce tak, aby vyhovoval zadání, použijeme právě stejnolehlost. Další skupinou úloh jsou úlohy o **vepisování obrazců.** Ukážeme si nyní takovéto typické příklady

Př.h3: Je dán půlkruh *P* vymezený průměrem *AB* a obloukem *ASB*. Uvnitř tohoto obrazce je zadán bod *M.* Sestrojte všechny příčky daného půlkruhu *P*, které mají krajní body na hranici půlkruhu a jsou bodem *M* děleny v poměru 1: 2.

Náčrtek a rozbor:

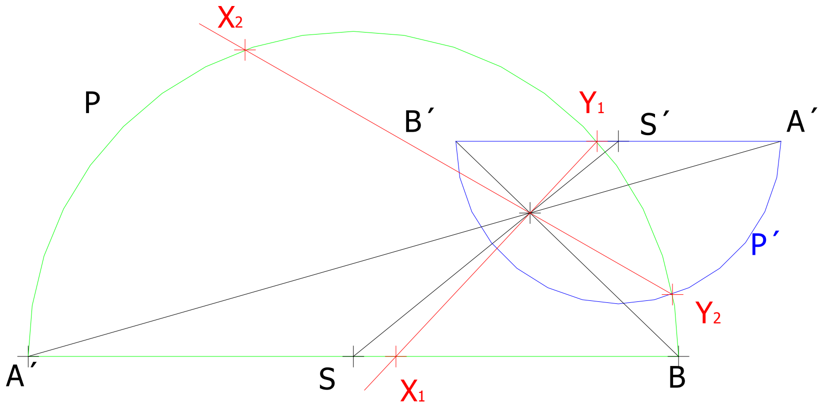


Je zřejmé, že bod ***X*** přejde do bodu ***Y*** ve stejnolehlosti se středem ***M*** a záporným (!) koeficientem **-½**. Zobrazíme-li v této stejnolehlosti celou hranici půlkruhu ***P***, musí se **hranice a její obraz** protnout v bodech ***Y*** (může jich být více), které jsou krajními body hledaných úseček. Krajní body ***X*** budou ležet na polopřímkách ***YM*** a na hranici půlkruhu ***P***.

$$H\left(M;\, k=-\tfrac{1}{2}\right):\ P \rightarrow P'$$

Postup je z uvedeného zřejmý, pustíme se proto rovnou do konstrukce. Povšimněte si, že při konstrukci stejnolehlého objektu využíváme vždy toho, že vzor a obraz sobě odpovídajících si přímek tvoří **rovnoběžky**. Zde konkrétně ***AB*** || ***A´B´.***

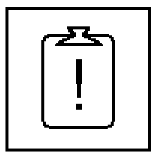
Konstrukce:



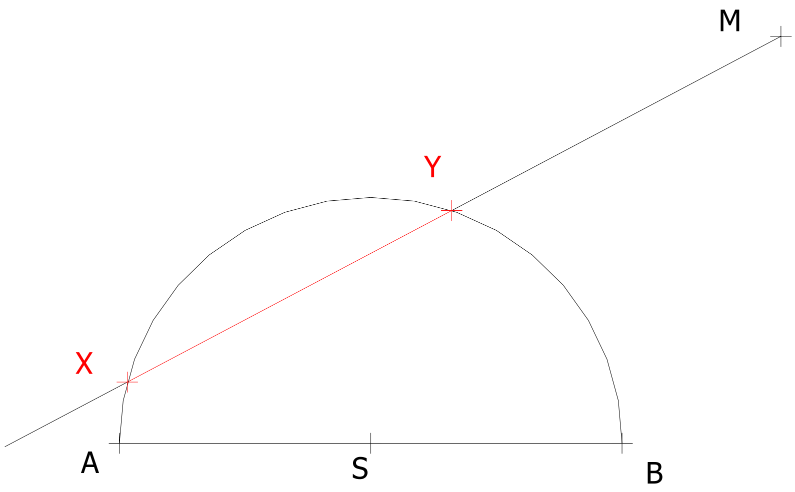
Počet řešení závisí na poloze bodu *M* uvnitř půlkruhu.

Poznámka:
Máte-li k dispozici dostatek místa, můžete místo uvedené homotetie použít homotetii s koeficientem **k = - 2,** danou kružnici pak nebudete zmenšovat, ale zvětšovat a místo bodů *Y* dostanete nejprve body *X*.

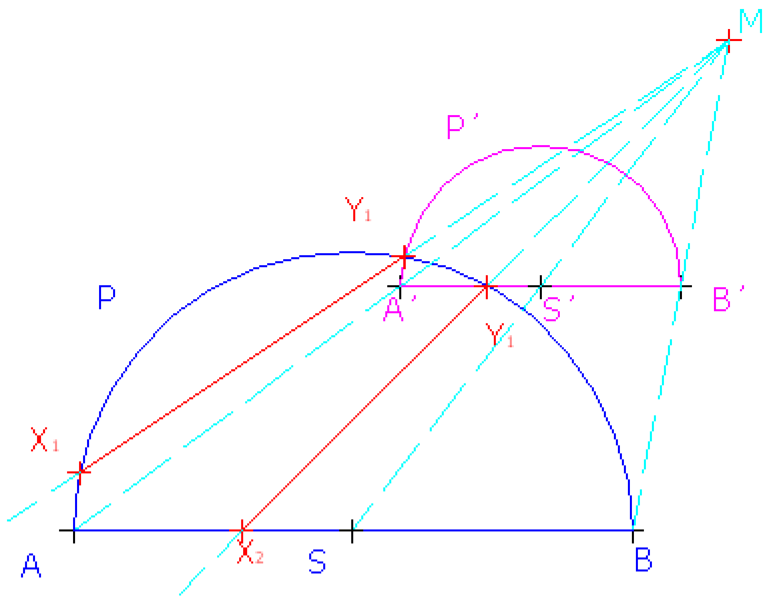
Př.h4: Je dán půlkruh *P* vymezený průměrem *AB* a obloukem *ASB.* Vně tohoto obrazce je zadán bod *M.* Sestrojte všechny příčky *XY* daného půlkruhu *P*, které leží na přímce procházející bodem *M*, přičemž platí: *MX : MY* = 2 : 1.



Náčrtek a rozbor:
Bod ***X*** přejde do bodu ***Y*** ve stejnolehlosti se středem ***M*** a **kladným** koeficientem ½. Zobrazíme-li v této stejnolehlosti celý půlkruh, dostaneme v průniku vzoru a obrazu krajní body Y hledaných úseček.



Princip a postup: $H\left(S;\frac{1}{2}\right):\ P \to P';\quad Y \in P \cap P';\ X \in \overrightarrow{MY} \cap P.$



Konstrukce:

Př. h5: Sestrojte trojúhelník *ABC*, víte-li, že α = 60°, β = 45° a t_c = 5 cm.

Rozbor:
Sestrojíme nejprve trojúhelník, který bude s daným trojúhelníkem podobný – tj. bude mít stejné vnitřní úhly. Pak jej užitím stejnolehlosti upravíme tak, aby jeho těžnice na stranu ***c*** měla délku **5 cm** (tj. těžnici podobného trojúhelníku prodloužíme nebo zkrátíme na požadovanou délku). K tomu využijeme nejlépe stejnolehlost se středem v bodě ***C*** a kladným koeficientem.

Postup:

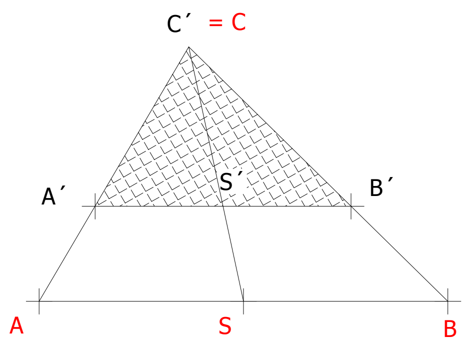
1) $\Delta A'B'C';\ |\angle\alpha'| = |\angle\alpha| = 60°;\ |\angle\beta'| = |\angle\beta| = 45°,$

2) $S';\ S'\ \textit{je střed}\ B'C',$

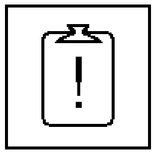
3) $\textit{užijeme stejnolehlost } H\left(C';k=\dfrac{5}{|S'C'|}\right),$

4) $\Delta ABC;\ H(C,k):\ \Delta A'B'C' \to \Delta ABC$.

Konstrukce:

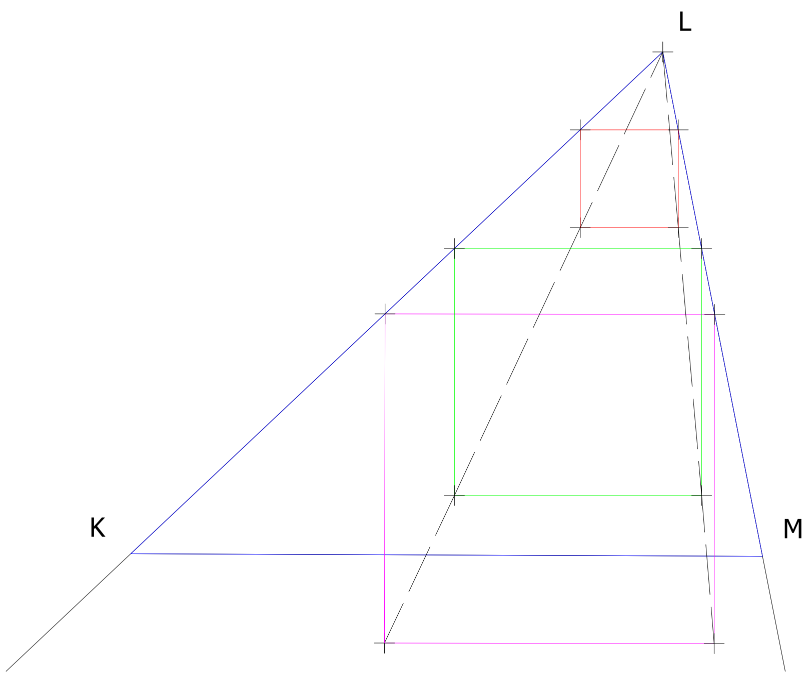


Př. h6: Do daného ostroúhlého trojúhelníku *KLM* vepište čtverec *ABCD* tak, aby strana *AD* ležela na úsečce *KM*, bod *B* ležel na *KL* a bod *C* na straně *LM*.

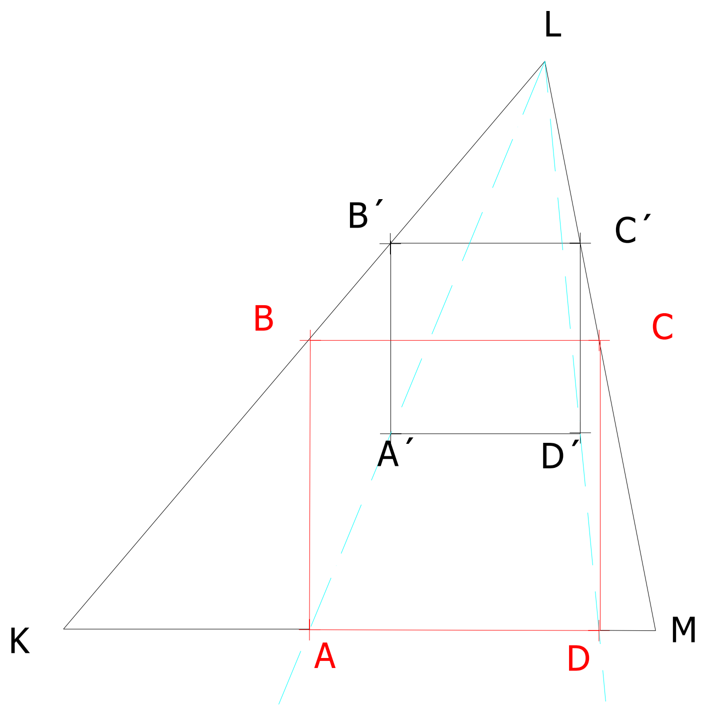


Rozbor:
Úlohu si zakreslete, jako by již byla vyřešena. Zkuste si představit, že úhel ***KLM*** je vyplněn vzájemně stejnolehlými čtverci, (máme na mysli např. stejnolehlost se středem v bodě ***L*** a kladným koeficientem). Jedním z těchto čtverců je ten, který hledáme. Sestrojíme tedy libovolně jiný z nich a využijeme vlastnosti, že ve stejnolehlosti sobě odpovídající si body leží na přímkách procházejících středem stejnolehlosti (zde bod ***L***). Nápovědu ke konstrukci vám poskytne následující obrázek.

Motivační náčrtek:

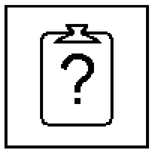


Konstrukce:



3.3 Úlohy na užití stejnolehlosti – cvičení

Tato kapitola je určena k tomu, abyste si v ní **sami** procvičili právě probranou látku. Za zadáním úloh jsou uvedeny **nápovědy** k jejich řešení a posléze i **řešení** samotná.



Úloha 1: **Sestrojte trojúhelník ABC, víte-li, že *a:b:c* = 4:5:6 a poloměr kružnice vepsané je ρ = 1,5 cm.**

Úloha 2: **Do kruhové výseče *AVB* s ostrým středovým úhlem vepište čtverec *KLMN* tak, aby strana *KL* ležela na *AV*, vrchol *M* na oblouku a vrchol *N* na *BV*.**

Úloha 3: **Jsou dány dvě různoběžky *p, q* a bod *M* neležící na žádné z nich. Sestrojte všechny kružnice dotýkající se přímek *p* a *q*, které procházejí daným bodem *M*.**

Úloha 4: **Je dána kružnice *k* a uvnitř této kružnice bod *M*. Sestrojte všechny tětivy *XY* kružnice *k* procházející bodem *M*, které jsou tímto bodem *M* děleny v poměru 1 : 3.**

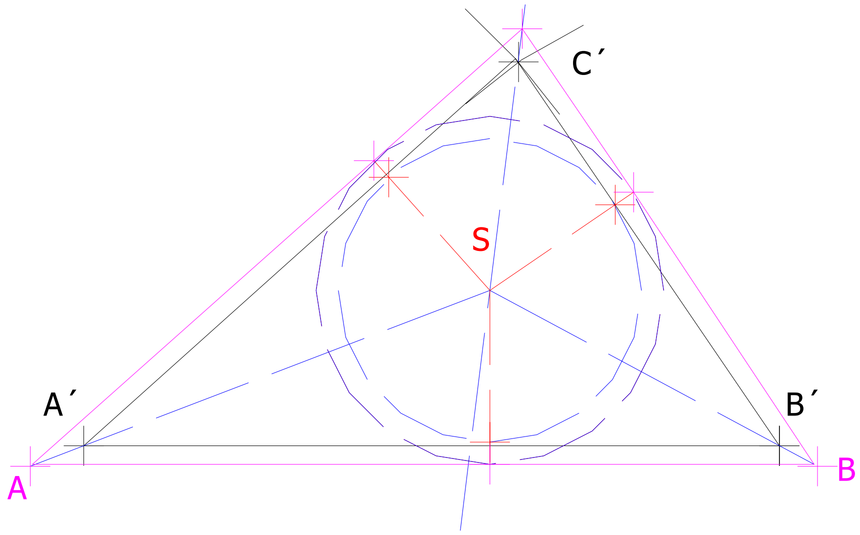
Nápověda k řešení úlohy 1:
Sestrojte nejprve trojúhelník mající strany v uvedeném poměru. Pak hledejte vhodnou homotetii. **ŘEŠENÍ**

Nápověda k řešení úlohy 2:
Sestrojte nejprve čtverec *K´L´M´N´*, který bude splňovat vše kromě podmínky, aby bod *M´* ležel na oblouku. Uvědomte si, že každé dvě soustředné kružnice jsou stejnolehlé se středem stejnolehlosti v bodě *V*.
ŘEŠENÍ

Nápověda k řešení úlohy 3:
Úhel různoběžek obsahující bod *M* si představte vyplněn několika vzájemně stejnolehlými kružnicemi. Kde leží jejich středy? Dokážete některou z nich sestrojit? Kde je na ní obraz bodu *M* ve stejnolehlosti se středem v průsečíku různoběžek?
ŘEŠENÍ

Nápověda k řešení úlohy 4:
Hledáte příčku útvaru, musíte tedy použít stejnolehlost se středem v bodě *M* a se záporným koeficientem.
ŘEŠENÍ

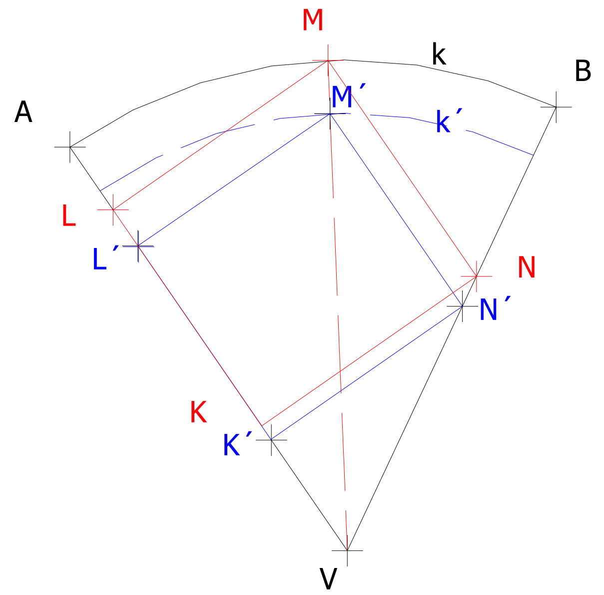
Řešení úlohy 1:
ZPĚT NA ZADÁNÍ
Po sestrojení podobného trojúhelníku zvolíme nejlépe homotetii se středem ve středu kružnice vepsané zvolenému trojúhelníku. Postup konstrukce je patrný z následujícího obrázku:



Poloměr kružnice vepsané pomocnému trojúhelníku *A´B´C´* je prodloužen na požadovanou délku 1,5 cm. Strany výsledného trojúhelníku jsou sestrojeny užitím principu rovnoběžnosti.

Řešení úlohy 2:
ZPĚT NA ZADÁNÍ
Téměř vše již bylo řečeno v nápovědě. Zvolenému čtverci opíšeme kruhovou výseč a uvědomíme si, že ve stejnolehlosti (zde se středem ***V***) sobě odpovídající si body leží na polopřímce vycházející ze středu stejnolehlosti.

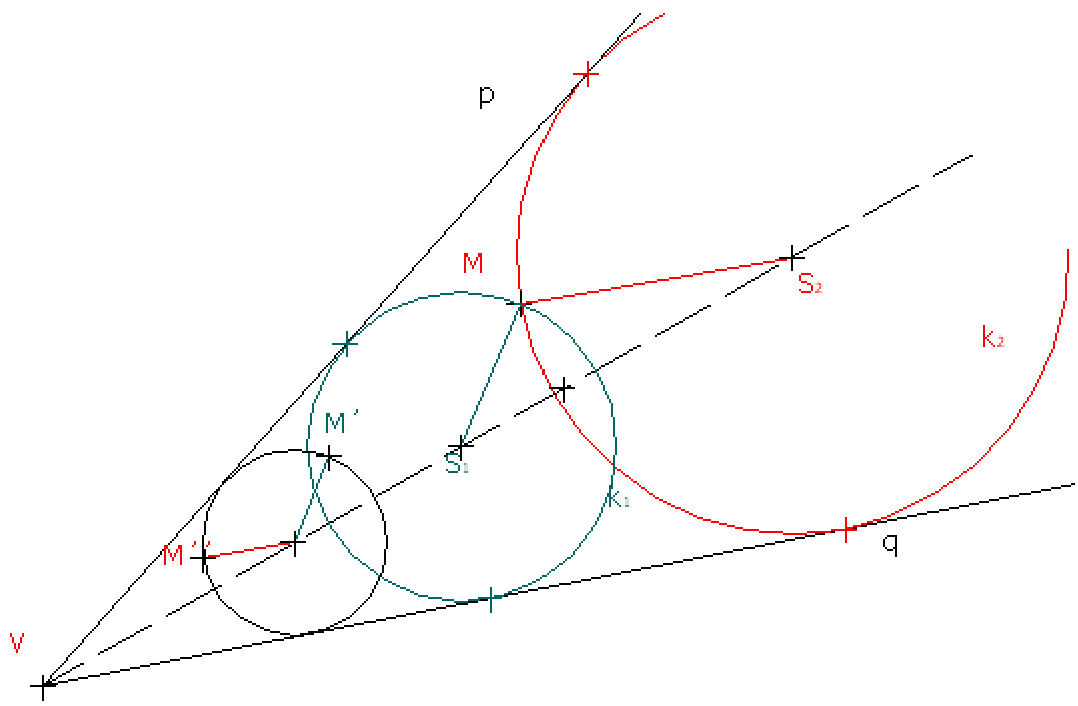
Konstrukce:



Řešení úlohy 3: **ZPĚT NA ZADÁNÍ**

Středy kružnic dotýkajících se ramen úhlu leží na ose úhlu. Sestrojíme jednu takovou kružnici – zvolíme např. její střed ***S´***a vedeme kolmice k ramenům, abychom získali poloměr a dotykové body. Tato kružnice ***k´*** je stejnolehlá s kružnicemi, které hledáme. Středem stejnolehlosti je vrchol úhlu. Stačí nalézt na ***k´*** obraz daného bodu ***M*** (jsou dva! – ***M´***a ***M´´***). Dále využijeme principu rovnoběžnosti – poloměr $\boldsymbol{MS_1}$ (resp. $\boldsymbol{MS_2}$) hledané kružnice je na rovnoběžce vedené bodem ***M*** s úsečkou ***M´S´*** (resp. ***M´´S´***).

Konstrukce:



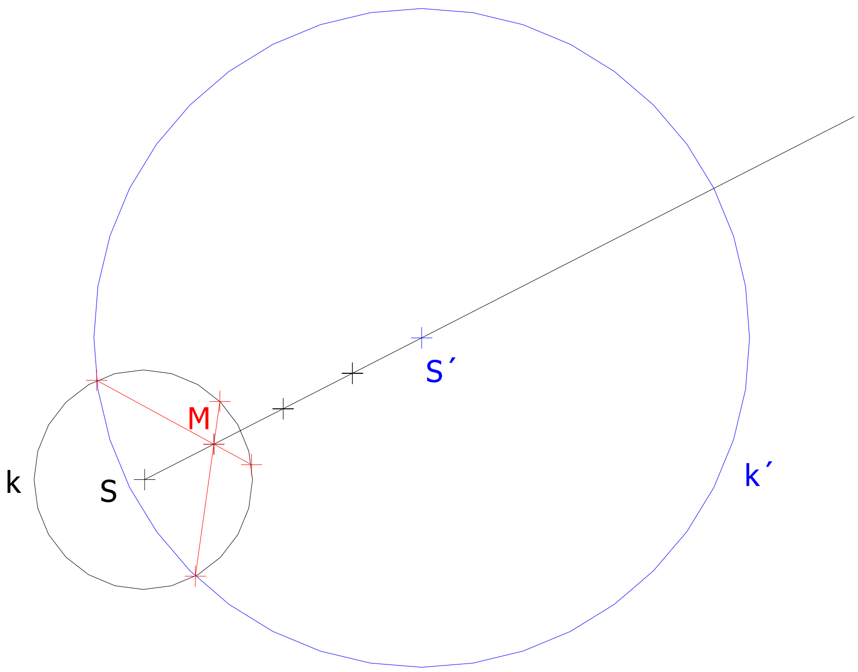
Řešení úlohy 4: ZPĚT NA ZADÁNÍ

Nabízí se užití stejnolehlosti se středem v bodě ***M*** a koeficientem buď **k = - 3** (budeme kružnici zvětšovat), nebo s koeficientem **k = - ⅓** (pak se bude kružnice zmenšovat). Co vybrat, závisí jenom na tom, jak velké jste zvolili zadání.
V následující konstrukci je zvoleno zvětšení:

$$\boxed{H(M; -3): k \to k'}\ .$$

Pro poloměry platí: **r´= 3r**. Kde se protnou vzor a obraz, tj. ***k*** a ***k´***, jsou krajní body výsledné úsečky. Inverzní homotetií k nim získáme chybějící krajní body.

Konstrukce:



Další úlohy na konstrukční využití stejnolehlosti můžete podle potřeby vyhledat podle následujících odkazů:

[1]: kapitola 3.7,str. 160 – 180,
[2]: kapitola 10.9, str. 81 – 84.

4 Konstruktivní úlohy řešené na základě výpočtu

<u>**V této kapitole se dozvíte**</u>: *jak se k sestrojení úsečky dané délky využívají geometrické konstrukce založené na užití redukčního úhlu, čtvrté geometrické úměrné a Euklidových vět; které úsečky dané algebraickým výrazem obsahujícím délky jiných daných úseček lze sestrojit na základě Euklidových vět, Pythagorovy věty a čtvrté geometrické úměrné.*

<u>V této kapitole se naučíte</u>: *sestrojit úsečku délky dané iracionálním číslem, sestrojit úsečku délky dané algebraickým výrazem.*

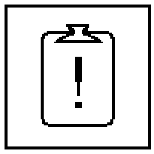
<u>Klíčová slova kapitoly</u>: ***Pythagorova věta, Euklidovy věty, čtvrtá geometrická úměrná, redukční úhel***

<u>Čas potřebný pro prostudování kapitoly</u>: ½ hodina teorie + 1 hodina řešení příkladů

4.1 Konstrukce úseček délky dané racionálním číslem nebo odmocninou

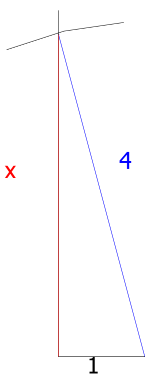
Sestrojit úsečku délky dané celým číslem nebývá problém. V kapitole **1.4** jsme poznali způsob, jak sestrojit úsečku délky dané zlomkem, např. $x = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$ cm. Snad postačí připomenout, že danou jednotku (obvykle 1 cm) rozdělíme užitím **redukčního úhlu** na 3 díly a zobrazíme úsečku délky **2 cm + ⅓ cm**. Možná namítnete, že to bude zřejmě hodně nepřesné. Jak si tedy poradíme ?
Uvědomte si, že zlomek vlastně naznačuje dělení. Je jistě přesnější vzít úsečku délky **7 cm** a užitím redukčního úhlu ji **rozdělit na třetiny**, čímž dostaneme úsečku požadované délky **x**.

Nyní si předvedeme konstrukci úseček daných druhými odmocninami. Jako pomůcka nám poslouží Pythagorova věta a Euklidovy věty (**viz kapitola 1.5**)



Př.1: Sestrojte úsečku délky $\sqrt{15}$ cm.

***1. způsob**:* Užijeme Pythagorovu větu: 16 = 15 + 1,
$c^2 = a^2 + b^2$,
$4^2 = 15 + 1^2$.
Sestrojíme tedy pravoúhlý trojúhelník s přeponou 4 cm a jednou odvěsnou 1 cm. Na druhé odvěsně je úsečka požadované délky.

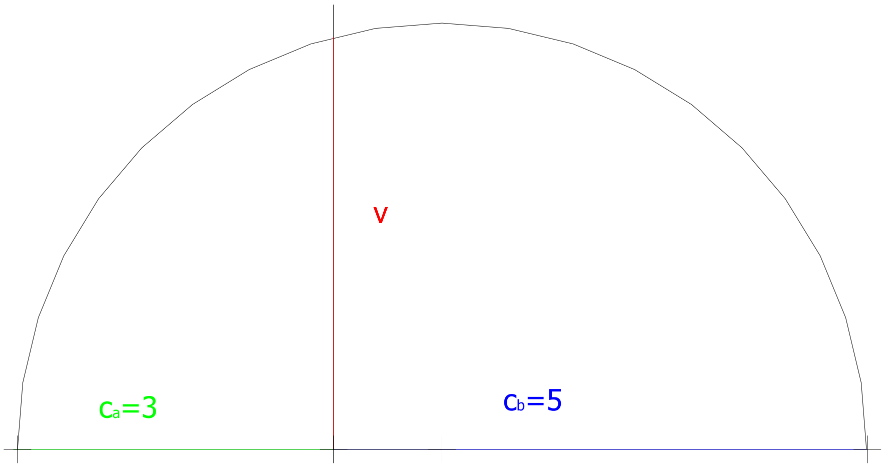


***2. způsob**:* Užijeme Euklidovu větu o výšce: 15 = 3 • 5,
$v^2 = c_a \cdot c_b$.

Užijeme tedy pravoúhlý trojúhelník s přeponou délky **$c = c_a + c_b = 3 + 5 = 8$cm**.

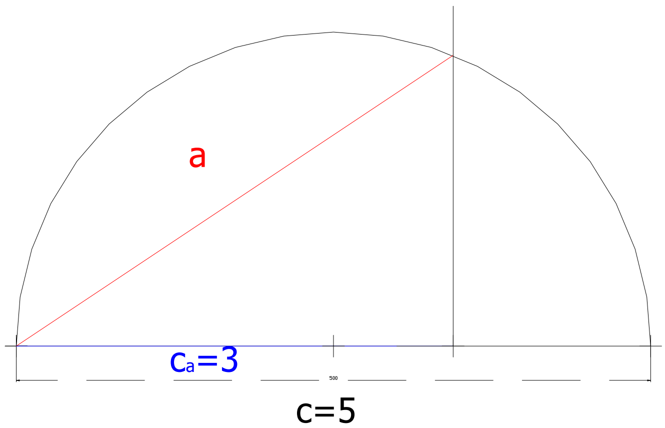
Nad přeponou opíšeme Thaletovu kružnici. Pata výšky je na rozhraní úseků c_a a c_b. Kolmice vztyčená v tomto bodě protne Thaletův oblouk ve vrcholu užitého pravoúhlého trojúhelníku. Hledanou délku ***v*** nalezneme na výšce na přeponu.

$$v = \sqrt{15}$$



3. způsob: Užijeme Euklidovu větu o odvěsně: 15 = 5 • 3,
$a^2 = c \cdot c_a$.

Přepona pomocného pravoúhlého trojúhelníku bude mít nyní délku ***c* = 5 cm**, úsek přilehlý k přeponě ***a*,** tj. c_a, bude mít délku **3 cm.** Hledanou délku $a = \sqrt{15}$ nyní nalezneme na odvěsně ***a.***



Př.2: Sestrojte úsečku délky $\sqrt{50}$ cm.

V tomto případě si pomůžeme částečným odmocňováním: $\sqrt{20}=\sqrt{4.5}=2.\sqrt{5}$. Sestrojíme tedy úsečku délky $\sqrt{5}$ a naneseme ji dvakrát.

Návod ke konstrukci $\sqrt{5}$:

1) $\sqrt{5}=\sqrt{2{,}5\,.\,2}$ podle Euklidovy věty o výšce: úseky na přeponě budou mít délky 2,5 cm a 2 cm.

2) 5 = 4 + 1; podle Pythagorovy věty – na odvěsnách *a* = 2, *b* = 1, na přeponě vyjde $\sqrt{5}$

Úloha 1: Sestrojte úsečku délky $\sqrt{33}$ cm.

Úloha 2: Je dána úsečka *a* (graficky). Sestrojte úsečku délky $a\sqrt{3}$ cm.

Úloha 3: Je dána úsečka *a* (graficky). Sestrojte úsečku délky $a\sqrt{5}$ cm.

Řešení úlohy 1:

a)Vyjdeme z toho, že 33 = 32 + 1. Tedy, že $\sqrt{33}=\sqrt{32+1}$. Sestrojíme-li tedy úsečku délky $\sqrt{32}$, stačí úlohu dokončit Pythagorovou větou. Po částečném odmocnění vidíme, že $\sqrt{32}=4.\sqrt{2}$. Sestrojíme tedy úsečku délky $\sqrt{2}$, naneseme ji čtyřikrát na jednu odvěsnu pravoúhlého trojúhelníku a na druhou naneseme jednotku 1 cm. Délka přepony bude $\sqrt{33}$.

b) Úlohu lze řešit též např. pomocí Euklidovy věty o odvěsně. Upravíme si: $\sqrt{33}=\sqrt{10.3{,}3}$. Na přeponu naneseme 10 cm, vyznačíme úsek přilehlý k přeponě *a: c_a = 3,3,* trojúhelník dorýsujeme a na odvěsně *a* získáme požadovanou délku $\sqrt{33}$.

Řešení úlohy 2:

Je důležité si uvědomit, že délka úsečky ***a*** je pro nás nyní **jednotkou.** Naneseme-li ji na odvěsny pravoúhlého trojúhelníku, bude délka jeho přepony $a\sqrt{2}$. Takto získanou úsečku přeneseme do nového trojúhelníku a naneseme ji na jednu odvěsnu. Na druhou umístíme úsečku délky ***a.*** Na přeponě druhého trojúhelníku máme nyní hledanou délku $a\sqrt{3}$.

Řešení úlohy 3:

Postupujeme stejně, jako když jsme v př. 2 sestrojovali jako dílčí část úlohy úsečku délky $\sqrt{5}$. Jen jako jednotku teď nepoužijeme 1 cm, ale délku úsečky ***a***. Na odvěsnu pravoúhlého trojúhelníku tedy naneseme délky: ***a*** a ***2a.*** Na přeponě tak získáme úsečku délky $a\sqrt{5}$. (Ověřte podle Pythagorovy věty!)

Další úlohy pro vaši samostatnou práci naleznete např. v [2]: kapitola 10.5, str. 78.

4.2 Konstrukce úseček délky dané algebraickým výrazem

Abychom mohli dobře pochopit, co se pod názvem kapitoly skrývá, musíme si uvědomit, které úsečky dokážeme euklidovsky (tj. jen pravítkem a kružítkem) sestrojit, známe-li délky úseček ***a, b*** a ***c.*** Budeme předpokládat, že ***a, b, c*** jsou kladná reálná čísla a že ***a > b.***

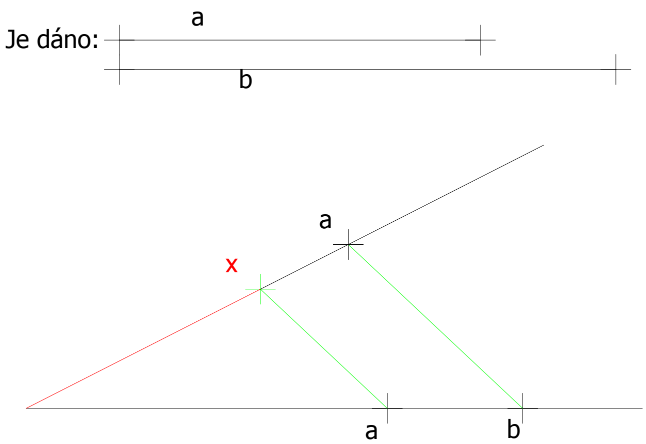
Umíme sestrojit úsečky délek: ***a + b; a – b; k.a*** (kladný reálný násobek úsečky).
Dále umíme **užitím Pythagorovy věty** sestrojit úsečky délek $\sqrt{a^2+b^2}$ (jako přeponu v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami ***a*** a ***b***); resp. $\sqrt{a^2-b^2}$ (jako odvěsnu v pravoúhlém trojúhelníku s přeponou ***a*** a odvěsnou ***b***);
Dále umíme sestrojit **užitím Euklidových vět** úsečku délky $\sqrt{a.b}$.
A konečně užitím čtvrté geometrické úměrné můžeme ze tří úseček ***a, b, c*** sestrojit úsečku délky $\frac{a\,.\,b}{c}$. (Kdo zapomněl, podívá se na kapitolu 1.5, str. 10).

Pustíme se nyní do úloh odvozených od těchto vztahů:

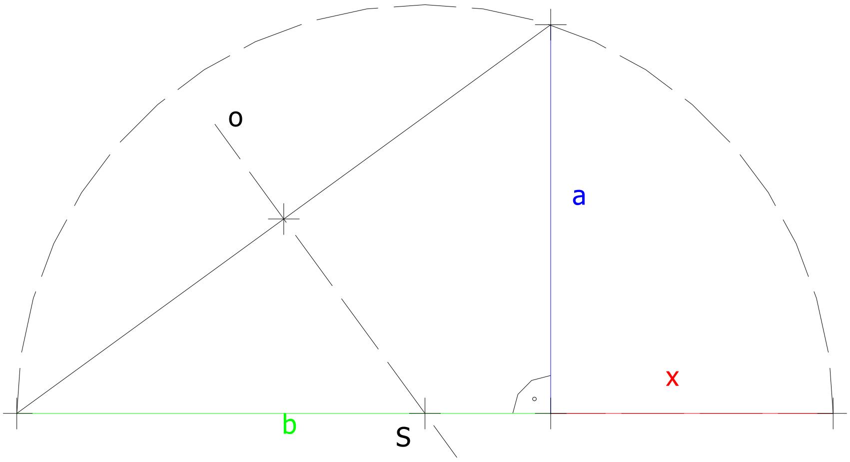
Př. 1: Sestrojte úsečku délky $x=\frac{a^2}{b}$, jsou-li dány úsečky délek a, b.

Máme v zásadě dvě možnosti, jak úlohu vyřešit:

1) Přepíšeme-li si výraz takto: $x=\frac{a\,.\,a}{b}$, uvidíme v něm konstrukci čtvrté geometrické úměrné. Přepíšeme např.: $\frac{x}{a}=\frac{a}{b}$. Na jedno rameno zvoleného úhlu tedy naneseme, co je ve jmenovatelích – tj. ***a*** a ***b***. Na druhé rameno úsečku délky ***a***. Její konec spojíme s koncovým bodem úsečky délky ***b*** a vznikne směr třetí strany podobných trojúhelníků. S tímto směrem vedeme rovnoběžku koncovým bodem úsečky délky ***a*** na ramenu pro jmenovatele. Na ramenu pro velikosti čitatelů se tak od vrcholu úhlu vymezí úsečka délky ***x***.



2) Další možností, jak úlohu vyřešit, je přepsat si zadání do tvaru: ***a^2 = x . b.*** V tomto zápisu bychom měli rozpoznat Euklidovu větu o výšce. Uvědomme si, že ***b*** a ***x*** jsou nyní úseky na přeponě, ***a*** leží na výšce.



Postup konstrukce je patrný z obrázku. Začneme tím, že na ramena pravého úhlu naneseme délky ***a, b*** , osa přepony, která je tětivou hledaného pravoúhlého trojúhelníku s přeponou ***b + x***, protne přímku, na níž leží ***b*** ve středu ***S*** Thaletova oblouku.

Př. 2: Sestrojte úsečku délky $x = \frac{a^2 - ab}{b}$, jsou-li dány úsečky délek *a, b*, *a* > *b*.

1. způsob: Postupně přepíšeme výraz tak, abychom v zápise uviděli konstruovatelné úsečky:

$$x = \frac{a^2 - m^2}{b} = \frac{n^2}{b}.$$

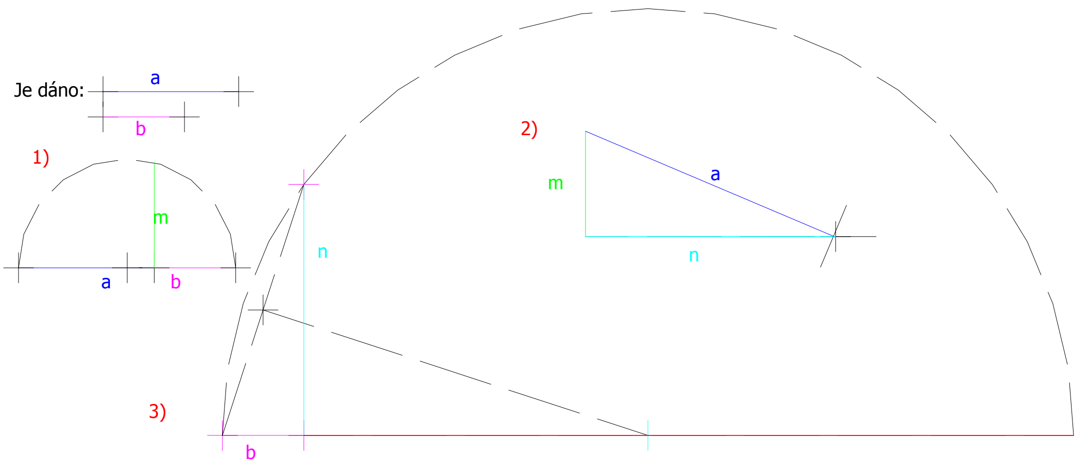
Z toho plyne následující postup konstrukce:

1) $m;\ m^2 = ab,$

2) $n;\ n^2 = a^2 - m^2,$

3) $x;\ x = \frac{n^2}{b}.$

Fáze řešení úlohy by byly tedy následující:

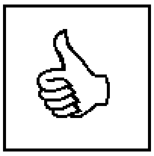


2. způsob:

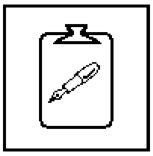
Zadání přepíšeme jinak: $x = \frac{a.(a-b)}{b}$ a hned vidíme, že stačí sestrojit úsečku délky ***a-b*** a pak použít čtvrtou geometrickou úměrnou.

Poznámka:

Měli-li bychom ještě navíc v takovýchto úlohách zadánu **jednotku**, bylo by možné konstruovat další úsečky dané algebraickými výrazy, které dosud nebylo možné sestrojit – např. $x = a^2$ (bylo by nutné si úlohu přepsat jako $x.1 = a^2$ *nebo* $x = \frac{a^2}{1}$, a dále bychom mohli postupovat jako ve výše uvedených příkladech.



Další konstrukce úseček a jejich aplikace lze vyhledat v [1] , kapitola 2.6, str.115 – 121.



5 Závěr

Milý studente,
věřím, že jste překonal úskalí probírané látky a dospěl zdárně až k závěru našeho společného snažení. Planimetrické konstrukční úlohy nepatří zrovna k nejlehčím partiím středoškolské matematiky, proto je o to cennější vše, co se vám podařilo zvládnout.

Naposledy vám připomenu několik nejdůležitějších zásad. Budete-li postaven před úkol řešit konstrukční úlohu, přečtěte si pečlivě zadání a snažte se z něj vytáhnout tu nejpodstatnější informaci – jaký útvar máte sestrojit. Nezapomeňte si přitom položit otázku, zda daná úloha je polohová nebo nepolohová. Hledaný útvar si načrtněte a do náčrtku si vyznačte barevně objekty, které máte zadány, tj. tedy vlastně ty, které můžete při konstrukci použít. U polohové úlohy si navíc vyznačte ten útvar, kterým musíte začít. Pak přemýšlejte, jakou cestou se dostanete od zadaných objektů k vrcholům a stranám hledaného útvaru. Přitom se vracejte k zadání a znovu si je po částech čtěte. Výsledky svého hledání zaznamenávejte do náčrtku i do postupu konstrukce. Pak se pusťte do konstrukce a při každém kroku si uvědomujte, zda mají dílčí konstrukční kroky více řešení. Celkový počet řešení vždy připište ke konstrukci. Na závěr své práce prověřte, zda útvar, který jste sestrojili, odpovídá tomu, co bylo v zadání požadováno (tím provedete zkoušku konstrukce).

Zafixujete-li si tyto pracovní návyky, úspěch se jistě dostaví. Pokud se přesto stane, že si s úlohou nebudete vědět rady, vraťte se k tomuto studijnímu materiálu a vyhledejte podobnou úlohu a připomeňte si principy jejího řešení.

Přeji vám hodně úspěchů při dalším studiu.

RNDr. Eva Davidová,
autorka opory

Literatura

[1] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia. Planimetrie* . Prometheus, spol. s r.o. Praha: 2003. ISBN: 80-7196-174-4

[2] PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy* . Prometheus, spol. s r.o. Praha: 1998. ISBN: 80-7196-099-3

[3] VEJSADA, František; TALAFOUS, František. *Sbírka úloh z matematiky*. SPN. Praha: 1969.

[4] POLÁK, Josef. *Středoškolská matematika v úlohách II.* Prometheus, spol. s r.o. Praha: 1999. ISBN: 80-7196-166-3

Poznámky:

Řešení planimetrických úloh – konstrukční a početní úlohy

RNDr. Eva Davidová

Ostrava 2006

Název	Řešení planimetrických úloh – konstrukční a početní úlohy
Editor	RNDr. Eva Davidová
Vydavatel	Wichterlovo gymnázium, Ostrava–Poruba, příspěvková organizace
Rozsah	70 stran
Vydání	první, 2006
Tisk	Wichterlovo gymnázium, Ostrava–Poruba, příspěvková organizace
Doporučená cena	**zdarma**; vytvořeno v rámci projektu SIPVZ 2006

ISBN 80-87058-00-3