

**Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova**

Diplomová práce

e

Renata Sikorová

Obor: Učitelství – matematika - fyzika

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí práce: RNDr. Jiří Kottas, CSc.

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracovala samostatně a že jsem vyznačila všechny prameny, z nichž jsem čerpala.

Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze, duben 1998

Renata Sikorová

Děkuji vedoucímu diplomové práce Jiřímu Kottasovi za cenné odborné rady a za ochotu, s níž mi vždy pomáhal.

Obsah

Předmluva	1
1. Finanční záležitosti.....	2
2. K limitě, pokud existuje.....	6
3. Existence limity	12
4. Pohodlný postup pro výpočet e	17
5. Ještě něco navíc pro náročné.....	19
6. Kvadratura hyperboly	21
7. René Descartes a Pierre de Fermat	25
8. Je plocha pod hyperbolou konečná?	30
9. O jedné vlastnosti čísla e	34
10. Význam e v diferenciálním a integrálním počtu	38
11. Čísla a kus jejich historie.....	40
12. Číslo e je iracionální	45
13. Důkaz transcendence čísla e	47
14. Neočekávaný výskyt čísla e	53
15. Některá zvláštní čísla vztahující se k e	56
16. Nezbytná trocha historie	58
17. Fascinující číslo e	62
Literatura.....	63

Předmluva

Než se pustíme do práce, měli bychom si říci několik slov na úvod. Už jste někdy slyšeli o Eulerově čísle e ? Věřím, že většina z Vás ano, ale pro mnohé je to možná jen abstraktní pojem, který pouze zavádí zmatek do matematiky. Někteří si snad vzpomenou, že je to základ přirozeného logaritmu. Ale proč zrovna toto číslo? Protože ..., ale to už bychom zasahovali do obsahu této knihy. Takže kdo má odvahu pustit se do čtení, určitě dostane odpověď na tuto otázku a dozví se mnoho dalších zajímavých informací.

Při psaní této práce bylo mým cílem říci příběh čísla e tak, aby si přišli na své všichni čtenáři. Práce je sestavena tak, aby její první kapitoly byly pochopitelné i pro čtenáře s pouze skromným matematickým zázemím. S definicí některých pojmů, jako jsou např. limita nebo nekonečná řada a její součet, se čtenář setká pouze na intuitivní úrovni. Práce by měla především motivovat studenty k dalšímu studiu analýzy, a ne odradit je hned na začátku příliš striktním pojetím problému. Obtížnost se ovšem stupňuje a pro ty nejnáročnější čtenáře je zde předveden důkaz transcendentnosti e , který už vyžaduje nějaké znalosti z integrálního počtu. Také jsem si několikrát dovolila odstoupit od hlavního tématu a trochu nahlédnout do dějin matematiky. Najdete zde něco z historie teorie čísel a také životopisné výňatky několika osobností, které sehrály roli v historii e . Tyto informace se totiž v učebnicích vyskytují velice zřídka.

Nakonec je tu i několik příkladů, kde se dá znalost čísla e využít. Mohou tedy posloužit učitelům matematiky jako prostředek pro motivaci studentů k lepšímu zapamatování tohoto čísla.

Tak to by snad bylo na úvod všechno. Co říkáte, pustíme se do toho?

Kapitola 1.

Finanční záležitosti

Jeden americký indián řekl: „Když se porazí poslední strom a umře poslední ryba, pak si člověče uvědomíš, že peníze se jíst nedají.“ Ovšem život bez peněz si nikdo z nás představit neumí a již od nepaměti byly právě finanční záležitosti ve středu zájmů lidstva. Dokážete si představit méně zajímavý životní cíl než je touha získat bohatství a dosáhnout finanční jistoty? Je tedy podivuhodné, že anonymní matematik – nebo snad obchodník či lichvář – si na začátku 17. století všiml zvláštní spojitosti mezi tím, jak vzrůstají finance, a chováním jistého matematického vyjádření nekonečna. Nyní se blíže seznámíme s tímto problémem.

Zaměříme se na velmi důležitou oblast ve finančnictví: na úrokový počet. Úrok, jak všichni dobře víme, je poplatek za půjčení peněz. Zvyk účtovat tento poplatek sahá do počátků zaznamenávání historie; vskutku většina nejstarší nám známé matematické literatury se zabývá otázkami, které se týkají úroků. Například na hliněné destičce z Mezopotámie, datované kolem roku 1700 př.n.l. (nyní se nachází v Louvru), najdeme následující problém: Máme danou částku peněz. Za jak dlouho se tato částka zdvojnásobí, když budeme každoročně skládat 20% úrokovou sazbu? Zformulujme nyní tento problém v algebraickém jazyce. Víme, že na konci každého roku suma vzroste o 20 procent, t.j. částku vynásobíme činitelem 1.2. Když původní částku označíme jako P , budeme mít na konci prvního roku kapitál $1.2 \cdot P$, na konci druhého roku $1.2 \cdot (1.2 \cdot P) = 1.2^2 \cdot P$, a po x letech suma vzroste o činitel 1.2^x . Protože suma se má oproti původní částce zdvojnásobit, máme $1.2^x \cdot P = 2 \cdot P$ a dostáváme se k rovnici $1.2^x = 2$ (všimneme si, že původní částka se v rovnosti nevyskytuje).

Vyřešit tuto rovnici – t.j. odstranit x z exponentu – pro nás znamená použít logaritmy, které ovšem Babylóňané neznali. Přesto byli schopni najít přibližné řešení. Jak? Všimli si, že $1.2^3 = 1.728$ je menší než 2, zatímco $1.2^4 = 2.0736$ je větší než 2; takže x musí mít hodnotu mezi 3 a 4. K zúžení intervalu používali postup známý jako lineární interpolace – nalezení čísla, které rozděluje interval od 3 do 4 ve stejném poměru jako dvojka rozděluje interval od 1.728 do 2.0736. Tato myšlenka vede k lineární rovnici pro x , která se dá jednoduše vyřešit pomocí elementární algebry. Bohužel Babylóňané neznali naše moderní algebraické metody a nalezení potřebných hodnot nebylo pro ně tak jednoduchou otázkou. Přesto jejich řešení $x = 3.7870$ (což jsou asi 3 roky, 9 měsíců a 13 dnů) se jen málo liší od správné hodnoty 3.8018 (asi 3 roky, 9 měsíců a 18 dnů). Pro zajímavost bychom ještě mohli upozornit na to, že Babylóňané nepoužívali náš desítkový systém (ten se začal používat až v raném středověku), ale systém šedesátkový, který je na rozdíl od desítkového nepoziční. Řešení problému bylo tedy na hliněné destičce zapsáno jako 3;47,13,20, což v šedesátkovém systému znamená $3 + 47/60 + 13/60^2 + 20/60^3$, a to je přibližně 3.7870.

K výpočtům používali Babylóňané jistý druh logaritmických tabulek. Svědčí o tom zachovalé hliněné destičky, na nichž je seznam prvních deseti

mocnin čísel $1/36$, $1/16$, 9 a 16 (první dvě vyjádřené v šedesátkovém systému jako $0;1,40$ a $0;3,45$). Nebyly to logaritmické tabulky v takové podobě, jak je dnes známe, byly to spíše seznamy mocnin čísel, a kromě toho pro mocninu nebyl vždy použit standardní základ. Zdá se, že tyto tabulky nebyly určeny k obecnějšímu použití, sloužily pouze ke konkrétnímu účelu, jakým bylo složené úrokování.

Zastavíme se na chvíli u složeného úrokování. Předpokládejme, že jsme vložili \$100 (tzv. základ) na konto s 5% úrokem, úrokovaným ročně (částku uvádíme v dolarech, protože je to měna, která se ve světě používá nejběžněji). Po roce bude na našem kontě $\$100 \times 1.05 = \105 . Tuto částku bude banka v dalším roce považovat za nový základ pro úrokování. Tedy na konci druhého roku budeme mít kapitál $\$105 \times 1.05 = \110.25 , na konci třetího roku $\$110.25 \times 1.05 = \115.76 , atd. Je vidět, že úroky přináší nejenom původní základ (\$100), ale počítají se i úroky z úroků (z toho vznikl pojem složeného úrokování). Takto bude náš kapitál růst podle geometrické posloupnosti s kvocientem 1.05. Porovnejme to s případem, že bychom vložili peníze na konto, které vyplácí úroky pomocí jednoduchého úrokování. Vložíme našich \$100 na 5% jednoduchý úrok. Náš kapitál bude každoročně růst o \$5, tedy podle aritmetické posloupnosti 100, 105, 110, 115, atd. Vidíme, že v našem případě se vyplatí spořit na konto se složeným úrokem. V praxi je třeba si dávat pozor a dobře počítat, protože spoření se zdánlivě výhodnější úrokovou sazbou, ale při jednoduchém úrokování, se po nějaké době přestane vyplácet vzhledem k původně méně výhodnému spoření se složeným úrokem.

Z uvedeného můžeme snadno vyvodit, co se stane v obecném případě. Předpokládejme, že investujeme základní částku P dolarů na konto, které vyplácí roční r -procentní úrok počítaný složeným úrokováním (při počítání vždy vyjádříme r jako desetinné číslo, např. 0.05 místo 5%). To znamená, že na konci prvního roku bude náš kapitál činit $P(1+r)$, na konci druhého roku $P(1+r)^2$, a tak až po t letech budeme mít na kontě $P(1+r)^t$. Když označíme toto množství jako S , dostaneme:

$$(1.1) \quad S = P(1+r)^t.$$

Tato formule je základem prakticky všech finančních kalkulací, ať už se jedná o bankovní konta, půjčky, hypotéky či anuity (pravidelná splátka dluhu).

Některé banky však počítají úroky ne jednou, ale několikrát za rok. Jak ale vypočítat úroky pro část roku? Již Tartaglia (1500 – 1557) se zabýval tímto problémem a ve svém hlavním matematickém díle *General Trattato di nameri et misure* z roku 1556 pojednává o této úloze: Vložíme 100 na konto s 20% úrokem. Jaký kapitál budeme mít na kontě za $2\frac{1}{2}$ roku, když počítáme i úroky z úroků? Tartaglia se shoduje s Cardanem a jinými v tom, že kapitál naroste za půl roku na 110 (vezmeme polovinu ročního úrokového podílu a použijeme ji jako sazbu za toto období), za 1 rok na 120, za dva roky na 144, za tři na $172\frac{4}{5}$. Tartaglia počítá kapitál x po $2\frac{1}{2}$ roce ze vztahu $100 : 110 = 144 : x$ a dojde k výsledku $x = 158\frac{2}{5}$, zatímco Cardano používá vztah $110 : 100 = 172\frac{4}{5} : x$ a dojde k $157\frac{1}{11}$. Důvod neshody se dá snadno

objevit. Když ze základu 100 budeme mít za $\frac{1}{2}$ roku 110, pak musíme tuto částku vzít za nový základ a po roce budeme mít kapitál 121, a ne 120. Stejně tak to platí i při dalším rozdělení. Hodnoty 144 po dvou letech a $172\frac{4}{5}$ po třech letech se pro takový výpočet tedy nedají použít.

Vezměme si ještě jeden příklad; na něm si ukážeme, o kolik se liší hodnoty kapitálu, když úroky počítáme ročně a půlročně. Na konto s 5% ročním úrokovým podílem vložíme částku \$100. Když budeme úroky počítat ročně, budeme mít po roce částku \$105. Při půlročním úrokování použijeme jednu polovinu ročního úrokového podílu, t.j. základ \$100 úrokovan dvakrát, po každé s úrokem 2.5%. Kapitál na konci prvního roku bude činit $\$100 \times 1.025^2$ neboli \$105.0625, kolem 6 setin více než by vynesl základ úrokovaný ročně.

V bankovním průmyslu lze najít všechny druhy úrokovacích schémat – roční, půlroční, čtvrtletní, týdenní i denní. Předpokládejme, že úrokování probíhá n krát ročně. Pro každé „poměrné období“, v bankovníctví nazývané *úrokovací období*, banka používá roční úrokový podíl vydělený číslem n , tj. r/n . Protože za t let máme (nt) úrokovacích období, základ P se po t letech zvedne na

$$(1.2) \quad S = P(1 + r/n)^{nt}.$$

Samozřejmě rovnost (1.1) je zvláštním případem rovnosti (1.2) – vezmeme $n = 1$.

Bylo by zajímavé srovnat částky peněz získané ze stejného základu po jednom roce pro různá úrokovací období, předpokládáme-li stejný roční úrokový podíl. K tomuto účelu použijeme výše uvedený příklad – částka $P = \$100$ na kontě s $r = 5\% = 0.05$ ročním úrokovým podílem. Budeme dosazovat do vztahu (1.2) a pro různá úrokovací období zapisovat výsledky do tabulky.

<i>úrokovací období</i>	n	r/n	S
roční	1	0.05	\$105.00
půlroční	2	0.025	\$105.06
kvartální	4	0.0125	\$105.09
měsíční	12	0.004166	\$105.12
týdenní	52	0.0009615	\$105.12
denní	365	0.0001370	\$105.13

Tab. 1

Je docela překvapující, že částka \$100 úrokovaná denně vynáší právě o 13 setin více než úrokovaná ročně, a asi o jednu setinu více než úrokovaná měsíčně nebo týdně. Nejsou to žádné velké rozdíly. Ale pozor – záleží na tom, jak velký byl základ: investujeme-li \$1 000 000, je rozdíl mezi ročním a denním úrokováním \$1267.50, a to už je lepší.

Tak jsme si připravili půdu pro to, abychom se konečně dostali k jádru věci – jmenovitě k číslu e , které je hlavním tématem této knihy. Uvažujme

tedy speciální případ rovnosti (1.2), případ, kdy $r = 1$. Znamená to roční úrokový podíl 100%, a bezpochyby s tak štědrá nabídkou se nevynoří žádná banka. Nicméně to, co my máme na mysli, se netýká aktuální situace, ale je to hypotetický případ, který má dalekosáhlé matematické důsledky. Pro další zjednodušení předpokládejme, že $P = \$1$ a $t = 1$ rok. Rovnost (1.2) přejde v

$$(1.3) \quad S = (1 + 1/n)^n$$

a našim cílem je prozkoumat chování tohoto výrazu pro rostoucí hodnoty n . Výsledky jsou zapsány v tabulce.

n	$(1 + 1/n)^n$
1	2
2	2.25
3	2.37037
4	2.44141
5	2.48832
10	2.59374
50	2.69159
100	2.70481
1 000	2.71692
10 000	2.71815
100 000	2.71827
1 000 000	2.71828
10 000 000	2.71828

Tab. 2

Vypadá to, že jakýkoli další vzrůst n stěží ovlivní výsledek – změny nastávají na stále méně významných desetinných místech.

Ale bude tento model pokračovat? Je možné, že nezáleží na tom, jak je n velké, a hodnoty $(1 + 1/n)^n$ se ustálí někde okolo čísla 2.71828? Tato domněnka se dá pečlivě dokázat pomocí matematické analýzy. Tímto problémem se budeme blíže zabývat ve třetí kapitole.

Není známo, kdo si jako první všiml zvláštního chování výrazu $(1 + 1/n)^n$ pro n rostoucí do nekonečna. Je pravděpodobné, že to bylo počátkem 17. století, kolem období, kdy si anglický matematik John Napier vymyslel své logaritmy. Ve druhém vydání Edward Wrightova překladu Napierova díla *Descriptio* [1618] se totiž nachází nepřímý odkaz na číslo, které je limitní hodnotou našeho výrazu – číslo e . Období počátku 17. století bylo poznamenáno nesmírným růstem v mezinárodním obchodu a finanční transakce všech druhů se bohatě rozvíjely. Mnoho pozornosti bylo věnováno pravidlům složeného úrokování a je možné, že číslo e se dočkalo svého prvního uznání právě v této souvislosti. Nicméně dále uvidíme, že i otázky, které nesouvisejí se složeným úrokováním, také vedou ke stejnému číslu a dá se říci, že v přibližně stejném období. Ale o tom se zmíníme až později, nejdříve se podíváme blíže na matematický proces, který je původcem e : proces limitní.

Kapitola 2.

K limitě, pokud existuje

V předchozí kapitole jsme se zabývali zkoumáním výrazu $(1 + 1/n)^n$ pro velké hodnoty n . Jistě nás muselo zarazit zvláštní chování tohoto výrazu. Jak je možné, že se jeho hodnota ustálí právě někde kolem čísla 2.71828? Provedme následující úvahu: zaměříme se pouze na výraz uvnitř závorek, $1 + 1/n$. Když n roste, hodnota $1/n$ klesá k 0 a tím se výraz $1 + 1/n$ blíží k 1, ačkoli jedničky nikdy nedosáhne. Mohlo by nás to tedy svádět k úsudku, že pro „skutečně velké“ n může být $1 + 1/n$ nahrazeno 1. Ale 1 umocněna na jakékoliv číslo je vždy rovna 1, takže to vypadá, že hodnota výrazu $(1 + 1/n)^n$ se pro velké n bude blížit 1. Tímto bychom mohli naše úvahy ukončit.

Předpokládejme však, že půjdeme jinou cestou. Víme, že když číslo větší než 1 umocňujeme na zvětšující se mocninu, výsledek je stále větší a větší. Protože $1 + 1/n$ je vždy větší než 1, můžeme z toho vyvodit, že $(1 + 1/n)^n$, pro velké hodnoty n , bude bezmezně růst, tj. bude se blížit nekonečnu. Znovu by to mohl být konec příběhu.

Skutečnost, že náš úsudek je chybný, vyplývá už z toho, že v závislosti na tom, jaký jsme zvolili postup, jsme se dostali ke dvěma odlišným výsledkům: 1 v prvním případě a nekonečno v případě druhém. V matematice musí být konečný výsledek jakýchkoli *platných* číselných operací, nedbaje toho, jak jsme postupovali, vždy stejný. Například můžeme vyhodnotit výraz $2 \cdot (3 + 4)$ tak, že buď nejdříve sečteme 3 a 4, dostaneme 7, a pak tento výsledek vynásobíme dvojkou, anebo nejdříve vynásobíme dvojkou 3 i 4 a pak sečteme výsledky. V obou případech dostaneme 14. Proč jsme tedy dostali dva odlišné výsledky pro $(1 + 1/n)^n$?

Odpověď je postavena na slovíčku *platný*. Když počítáme hodnotu výrazu $2 \cdot (3 + 4)$ druhou metodou, tiše používáme jeden ze základních zákonů aritmetiky, zákon distributivní, který říká, že pro jakákoli tři čísla x , y a z vždy platí rovnost $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$. Přejít mezi levou a pravou stranou je platná operace. Příklad *neplatné* operace je, když napíšeme $\sqrt{(9 + 16)} = 3 + 4 = 7$, chyba, kterou často dělají začínající studenti algebry. Příčina je v tom, že druhá odmocnina není distributivní operace, a vskutku jediná správná cesta ve vyhodnocování $\sqrt{(9 + 16)}$ je *nejprve* sečíst čísla pod odmocninou a *potom* odmocnit: $\sqrt{(9 + 16)} = \sqrt{25} = 5$. Naše manipulace s výrazem $(1 + 1/n)^n$ byla stejně tak neplatná, protože jsme si mylně zahrávali s jedním z nejzákladnějších pojmů matematické analýzy: pojmem *limita*.

Když říkáme, že posloupnost čísel $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ má limitu L , pro n jdoucí do nekonečna, máme na mysli to, že pokud n roste, členy posloupnosti se stále více blíží k číslu L . Řečeno jinak, můžeme dosáhnout toho, aby rozdíl mezi a_n a L (v absolutní hodnotě) byl menší než nějaké pevně zvolené kladné číslo, ať už je jakkoli malé; stačí, když zvolíme n dostatečně velké. Vezměme např. posloupnost $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$, jejíž obecný člen je $a_n = 1/n$. Když n roste, členy se stále více blíží 0. To znamená, že pokud

zvolíme n dosti velké, můžeme rozdíl mezi $1/n$ a limitou 0 udělat tak malý, jak si přejeme. Řekněme, že chceme, aby $1/n$ bylo menší než $1/1000$; vše, co je potřeba udělat, je zvolit n větší než 1000. Když potřebujeme $1/n$ menší než $1/1\,000\,000$, jednoduše zvolíme nějaké n větší než $1\,000\,000$, atd. Abychom tuto situaci vyjádřili slovy, řekneme, že $1/n$ se blíží 0, když n roste neomezeně, a píšeme $1/n \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$. Velice často používáme zkrácený zápis:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Měli bychom si uvědomit, že tento zápis pouze vyjadřuje fakt, že se hodnota výrazu blíží k 0, ale neříká nic o tom, že by samo $1/n$ bylo někdy rovno 0 – ve skutečnosti nikdy nebude. Zde je tedy podstata pojmu limita: členy posloupnosti se mohou přiblížit limitě tak, jak si přejeme, ale skutečně ji nikdy nedosáhnou.

Pro posloupnost $1/n$ je výsledek limitního procesu docela předvídatelný. Nicméně v mnoha případech nemusí být ihned jasné, jaká bude limitní hodnota nebo zdali limita vůbec existuje. Například posloupnost $a_n = (2n+1)/(3n+4)$, jejíž členy pro $n = 1, 2, 3, \dots$ jsou $3/7, 5/10, 7/13, \dots$, se blíží limitě $2/3$ pro $n \rightarrow \infty$. Jak dojdeme k tomuto výsledku? Čitatel i jmenovatel podělíme číslem n , dostaneme tak ekvivalentní výraz $a_n = (2 + 1/n)/(3 + 4/n)$. Když $n \rightarrow \infty$, obojí $1/n$ i $4/n$ se blíží k 0, tedy hodnota výrazu se blíží $2/3$. Jiným příkladem může být posloupnost $a_n = (2n^2 + 1)/(3n + 4)$, jejímiž členy jsou $3/7, 9/10, 19/13, \dots$, a ty rostou neomezeně pro $n \rightarrow \infty$. Příčinou toho je přítomnost n^2 , díky němuž čitatel roste rychleji než jmenovatel. Výsledek zapisujeme ve tvaru $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, ačkoli striktně řečeno tato posloupnost nemá limitu. Limita – pokud existuje – musí být určité reálné číslo, a nekonečno není reálné číslo.

Pojem nekonečna mátl matematiky a filozofy po staletí. Existuje číslo, které je větší než všechna ostatní čísla? Když ano, jak velké je toto „číslo”? Platí pro ně stejná pravidla pro počítání jako pro běžná čísla? A naopak v malém měřítku, můžeme dělit kvantitu – řekněme číslo nebo úsečku – znovu a znovu na malé části, nebo se eventuálně dostaneme k nedělitelné části, matematickému atomu, který nemůže být dále dělen? Otázky, jako je tato, znepokojovaly filozofy starobylého Řecka více než dva tisíce let tomu, a znepokojují nás dodnes – svědčí o tom nikdy nekončící hledání elementárních částic, těch stavebních kvádříků, ze kterých je snad hmota sestavena.

Z příkladů uvedených výše je vidět, že se symbolem pro nekonečno ∞ nelze počítat jako s obyčejným číslem. Když např. položíme $n = \infty$ ve výrazu $(2n+1)/(3n+4)$, budeme mít $(2\infty+1)/(3\infty+4)$. Nyní si musíme uvědomit, že násobek ∞ je ∞ , a pokud k ∞ přičteme nějaké číslo, dostaneme opět ∞ . Takže náš výraz se zredukuje na ∞/∞ . Kdyby ∞ patřilo mezi běžná čísla, pak by byl výraz vzhledem k obvyklým pravidlům aritmetiky jednoduše roven 1. Ale on *není* roven 1, ale – jak jsme viděli – $2/3$. Podobná situace nastává, když chceme spočítat $\infty - \infty$. Svádí nás to k tomu, abychom si řekli, že odečítáme od sebe dvě stejná čísla, dostaneme tedy 0. O tom, že

to nemusí být pravda, svědčí výraz $1/x^2 - [(\cos x)/x]^2$, Když $x \rightarrow 0$, oba členy se blíží nekonečnu. A přece s malou znalostí trigonometrie lze ukázat, že celkový výraz se blíží limitě 1.

Výrazy jako ∞/∞ nebo $\infty - \infty$ jsou známy pod názvem „neurčité formy“. Nemají určitou hodnotu; ta může být odhadnuta pouze pomocí limitního procesu. Volně řečeno, v každé neurčité formě se střetávají dvě kvantify, jedna má sklon výraz zvětšovat, ta druhá naopak zmenšovat. Konečný výsledek závisí na obsaženém limitním procesu. Běžně se v matematice setkáváme s těmito neurčitými formami: $0/0, \infty/\infty, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0$, a 1^∞ . K té poslední patří i výraz $(1 + 1/n)^n$.

Samotné algebraické úpravy neurčitého výrazu nemusí vždy stačit k určení konečného výsledku limitního procesu. Samozřejmě my dokážeme pomocí počítače nebo kalkulátoru spočítat výraz pro obrovské hodnoty n , řekněme milion nebo miliardu. Ale takový výpočet může pouze *navrhnout* limitní hodnotu. Nemáme záruku, že tato hodnota bude opravdu vyhovovat pro stále větší n . V tom je také základní rozdíl mezi matematikou a vědami, které jsou založeny na experimentech a pozorováních, jako je fyzika nebo astronomie. V těchto vědách se může stát, že určitý výsledek, řekněme číselný vztah mezi teplotou daného množství plynu a jeho tlakem, který je podporován velkým množstvím experimentů, bude považován za přírodní zákon. Neexistuje však cesta, jak tento zákon dokázat matematicky. *Matematický důkaz* je řetězec logických dedukcí, všechny se opírají o malé množství počátečních předpokladů („axiomů“) a podrobují se striktním pravidlům matematické logiky. Platnost matematického zákona – věty – dokážou potvrdit pouze některé řetězce dedukcí. Samozřejmě můžeme udělat hypotézu, vykreslit z ní všechny prozatímní výsledky, ale matematik by z toho nikdy nevyvozoval definitivní závěry.

Jak jsme viděli v předchozí kapitole, výraz $(1 + 1/n)^n$ by se mohl pro velmi velké hodnoty n blížit číslu 2.71828 jako limitě. Abychom však tuto limitu určili s jistotou, nebo nejdříve dokázali, že tato limita existuje, musíme použít jinou metodu, než je počítání jednotlivých hodnot. (Mimo to, počítání výrazu pro velké n je stále obtížnější, k provedení umocňování je nutno použít logaritmy.) Naštěstí máme k dispozici takovou metodu. Vyžaduje však použití *binomické věty*. *Binom* (dvojčlen) je jakýkoli výraz sestávající ze součtu dvou členů; můžeme jej zapsat ve tvaru $a + b$. Jedním z prvních problémů, které řeší elementární algebra, je nalezení mocnin dvojčlenu, čili jak se dá rozložit výraz $(a + b)^n$ pro $n = 0, 1, 2, \dots$. Tady jsou výsledky několik prvních n :

$$\begin{aligned}(a + b)^0 &= 1 \\(a + b)^1 &= a + b \\(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\(a + b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\end{aligned}$$

Z těchto několika málo příkladů lze jednoduše usoudit na obecný vzorec: rozvoj $(a + b)^n$ se skládá z $n + 1$ členů, každý má tvar $a^{n-k}b^k$, kde $k =$

$1, 2, 3, \dots, n$. Proto když jdeme zleva doprava, exponent u a klesá od n do 0 (poslední člen můžeme zapsat jako a^0b^n), zatímco u b roste od 0 do n . Koeficienty u různých členů, známé jako *binomické koeficienty*, tvoří trojúhelníkové schéma:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & 1 & & 1 \\ & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Toto schéma dostalo jméno po francouzském filozofovi a matematikovi Blaise Pascalovi (1623 – 1662), který jej použil ve své teorii pravděpodobnosti (samotné schéma bylo známo ještě mnohem dříve). Říká se mu Pascalův trojúhelník. V tomto trojúhelníku je každé číslo součtem dvou čísel, která se ve schématu nacházejí o řádek výše než dané číslo a leží bezprostředně napravo a nalevo od něj. Například čísla v pátém řádku, 1, 4, 6, 4, 1, získáme z těch ve čtvrtém následovně:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & \swarrow & & \searrow & \swarrow & & \searrow & \swarrow & \searrow \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

(Všimněme si, že koeficienty jsou stejné, ať je čteme zleva nebo zprava.)

Při použití Pascalova trojúhelníku máme jednu nevýhodu v hledání binomických koeficientů: musíme spočítat všechny řádky až po ten, který nás zajímá. Když n roste, je postup stále časově náročnější. Naštěstí je tady vztah, který nám umožní nalézt tyto koeficienty, aniž bychom potřebovali Pascalův trojúhelník. Když si označíme koeficient u členu $a^{n-k}b^k$ jako nC_k , potom

$$(2.1) \quad {}^nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Symbol $n!$ (čteme n faktoriál,) představuje součin $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$; na ukázkou zde uvádím prvních pár hodnot $n!$ je $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, a $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Je také definováno $0! = 1$. Demonstrujme použití tohoto vzorce na příkladu mocniny $(a+b)^4$. Obdržíme koeficienty ${}^4C_0 = 4!/(0! \cdot 4!) = 1$, ${}^4C_1 = 4!/(1! \cdot 3!) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4/(1 \cdot 2 \cdot 3) = 4$, ${}^4C_2 = 4!/(2! \cdot 2!) = 6$, ${}^4C_3 = 4!/(3! \cdot 1!) = 4$, a ${}^4C_4 = 4!/(4! \cdot 0!) = 1$ – jsou to ta stejná čísla, jaká se objevila v pátém řádku Pascalova trojúhelníku.

Binomická věta se dá jednoduše dokázat pro všechna celá kladná n , a to pomocí matematické indukce: stačí ukázat, že když věta platí pro všechny hodnoty až po řekněme m , pak musí platit i pro $n = m+1$ (věta samozřejmě platí pro $n = 1$, protože $(a+b)^1 = a+b$). Všimněme si, že mocnina $(a+b)^n$ má právě $n+1$ členů. O rozšíření platnosti této věty pro případ, že n je celé

záporné číslo nebo zlomek, se zasloužil Isaac Newton. V těchto případech bude suma obsahovat nekonečné množství členů.

Vnímavý pohled na rovnici (2.1) ukáže, že ji můžeme přepsat do tvaru:

$$(2.2) \quad {}^nC_k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Stačí si uvědomit, že $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, zatímco $(n-k)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-k)$, tedy všechny činitele od 1 do $(n-k)$ v čitateli rovnice (2.1) můžeme pokrátit s těmi ve jmenovateli, a zůstane tam pouze $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$. Když budeme mít na paměti rovnici (2.2), můžeme aplikovat binomickou větu na výraz $(1 + 1/n)^n$. Máme $a = 1$ a $b = 1/n$, tedy

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n \cdot \left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 \\ &\quad + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

Po jednoduchých úpravách dostaneme

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{(1 - \frac{1}{n})}{2!} + \frac{(1 - \frac{1}{n}) \cdot (1 - \frac{2}{n})}{3!} + \dots + \frac{1}{n^n}.$$

Protože my hledáme *limitu* výrazu $(1 + 1/n)^n$ pro $n \rightarrow \infty$, musíme dovolit n , aby rostlo neomezeně. Se zvětšujícím se n je v rozvoji stále více členů. Dalším důsledkem je, že pro velké hodnoty n se budou výrazy v závorkách blížit 1, protože limity $1/n, 2/n, \dots$ pro $n \rightarrow \infty$ jsou všechny 0. Dostaneme tedy nekonečný součet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Musíme dodat, že toto odvození není vhodné k důkazu, že hledaná limita skutečně existuje. Kompletní důkaz naleznete v následující kapitole. Ale nyní berme existenci této limity jako fakt. Označíme-li ji písmenem e (více o volbě tohoto písmene později), budeme mít

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

V příští kapitole rovněž oceníme pohodlnost tohoto postupu při počítání e . Součet uvedené nekonečné řady se totiž mnohem rychleji blíží limitní hodnotě, než kdybychom počítali přímo $(1 + 1/n)^n$. Prvních sedm částečných součtů této řady je:

$2 =$	2
$2 + 1/2 =$	2.5
$2 + 1/2 + 1/6 =$	$2.666\dots$
$2 + 1/2 + 1/6 + 1/24 =$	$2.708333\dots$
$2 + 1/2 + 1/6 + 1/24 + 1/120 =$	$2.716666\dots$
$2 + 1/2 + 1/6 + 1/24 + 1/120 + 1/720 =$	$2.7180555\dots$
$2 + 1/2 + 1/6 + 1/24 + 1/120 + 1/720 + 1/5040 =$	$2.718253968\dots$

Už z této krátké ukázky můžeme usoudit, že řada konverguje velmi rychle. Je to proto, že roste velmi rychle $k!$ ve jmenovateli každého členu, a tím přidávané zlomky mění hodnotu výrazu na stále méně významných desetinných místech. Navíc protože jsou všechny členy kladné, konvergence je *monotónní* : každý dodaný člen nás přiblíží k limitě; není to tak u řad s alternujícími (střídavými) znaménky. Tento fakt hraje roli v důkazu existence $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$. Tím se však budeme zabývat v následující kapitole.

Kapitola 3.

Existence limity

Jak už víme, číslem e nazýváme v matematice limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Než se však pustíme do důkazu existence této limity, odvodíme, resp. připomeneme si některé poznatky, které budeme dále potřebovat.

Měli bychom si uvědomit, že při hledání $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ hledáme vlastně limitu posloupnosti, jejíž n -tý člen má tvar $(1 + \frac{1}{n})^n$. Připomeňme si tedy některé základní znalosti o posloupnostech.

Nechť je dána posloupnost:

$$(3.1) \quad a_1, a_2, a_3, \dots$$

Množinu všech čísel, jež jsou členy této posloupnosti, nazveme množinu všech členů posloupnosti (3.1), a na okamžik ji označíme písmenem M . Číslo x je tedy prvkem množiny M právě tehdy, když existuje alespoň jedno přirozené číslo n takové, že je $a_n = x$. Například u naší zkoumané posloupnosti se množina M skládá ze všech čísel tvaru $(1 + \frac{1}{n})^n$, několik jejich členů naleznete v Tabulce 2 (Kapitola 1.). Je-li množina M shora omezená, tj. existuje-li číslo k tak, že pro všechna n je $a_n \leq k$, budeme říkat, že posloupnost (3.1) je shora omezená. A právě s omezenými posloupnostmi se budeme setkávat, ukažme si tedy jednu velmi důležitou větu, která se jich týká.

3.1. Věta. Nechť je dána neklesající posloupnost $a_1, a_2, a_3, \dots$. Je-li tato posloupnost shora omezená, má vlastní limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n=1,2,\dots} a_n.$$

3.2. Poznámka. Mnozí z vás se asi pozastavili nad zápisem $\sup_{n=1,2,\dots}$. Je to pojem, se kterým se setkáte na vysoké škole, my jej ovšem potřebujeme k důkazu věty, proto si jej trochu přiblížíme.

Předpokládejme, že máme neprázdnou shora omezenou číselnou množinu M . Pak tvrdím, že existuje právě jedno číslo G , které má tyto vlastnosti:

1. Žádné číslo množiny M není větší než G .
2. Je-li G' libovolné číslo menší než G , existuje aspoň jedno číslo množiny M , jež je větší než G' .

Tomuto číslu G říkáme supremum množiny M (značka $\sup M$) nebo též horní hranice M .

Laicky řečeno, supremum množiny je nejmenší číslo, které je větší (minimálně rovno) než všechna čísla množiny. Stejně tak pro zdola omezené množiny existuje infimum, tj. největší číslo, které je menší (maximálně rovno) než všechna čísla množiny.

Důkaz existence suprema zde nebudeme provádět, je to předmětem studia na vysoké škole. Pro zájemce o samostatné studium doporučuji: V. Jarník, *Diferenciální počet I* ([D1]).

Důkaz. Vraťme se nyní k důkazu Věty 3.1. Výše jsme označili jako M množinu všech členů posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \dots$. Podle předpokladu je tato množina shora omezená, existuje tedy supremum $G = \sup_{n=1,2,\dots} a_n$. Především je $a_n \leq G$ pro všechna n . Za druhé: když zvolíme číslo $\varepsilon > 0$, existuje v posloupnosti aspoň jeden člen větší než $G - \varepsilon$, to znamená, že existuje přirozené číslo n_0 takové, že $a_{n_0} > G - \varepsilon$. Protože uvažujeme posloupnost neklesající, je $a_n \geq a_{n_0}$ pro $n > n_0$ a platí $G - \varepsilon < a_n \leq G < G + \varepsilon$, tj. $|a_n - G| < \varepsilon$. Našli jsme tedy takové číslo, že vždy můžeme udělat rozdíl mezi ním a členem posloupnosti menší než nějaké pevně zvolené kladné číslo ε . A jak jsme viděli v předchozí kapitole, je toto číslo limitou posloupnosti, tudíž $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = G = \sup_{n=1,2,\dots} a_n$.

Pro nerostoucí zdola omezenou posloupnost platí obdobná věta; limita této posloupnosti je pak: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n=1,2,\dots} a_n$ (infimum množiny). Důkaz se provádí stejným způsobem, a proto jej ponechávám na čtenáři.

Následující pomocná věta se týká nerovností mezi reálnými čísly. Jedná se o známý vztah mezi geometrickým průměrem $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ a aritmetickým průměrem $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ nezáporných reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$. Uvedeme ji i s důkazem vzhledem k jeho jednoduchosti.

3.3. Lemma. Nechť je $n \in \mathbb{N}$ a nechť x_k ($k = 1, 2, \dots, n$) jsou nezáporná reálná čísla. Potom platí :

$$(3.2) \quad \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Důkaz. Rovnost (3.2) se dá napsat:

$$(3.3) \quad x_1 x_2 \dots x_n \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^n,$$

a v tomto tvaru ji budeme dokazovat. Pro náš důkaz je podstatné, že tuto rovnost umíme dokázat tak jednoduchým prostředkem, jako je matematická indukce. Nerovnost (3.3) pro $n = 1$ platí triviálně. Zdůvodnění pro $n = 2$ je rovněž jednoduché, protože nerovnost

$$x_1 x_2 \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2$$

lehce vyplývá z platného vztahu

$$0 \leq (x_1 - x_2)^2.$$

Indukci lze provádět více způsoby, možná se s nějakým z nich setkáte např. na vysoké škole, my použijeme způsob ne tak běžný, ale zato jednoduchý.

Nejprve si povšimneme, že tvrzení zřejmě platí v případě, že alespoň jedno z čísel x_k , $k = 1, 2, \dots, n$, je 0 (protože pak je geometrický průměr roven 0), nebo platí-li $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ (pak nastává rovnost). Abychom si ještě zjednodušili postup, uděláme takový trik: Nechť A je kladné reálné číslo, nahradíme v (3.3) všechna x_k násobky Ax_k , a dostaneme:

$$(3.4) \quad A^n x_1 x_2 \dots x_n \leq A^n \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^n.$$

Nerovnice (3.4) je splněna právě tehdy, když platí nerovnice (3.3). Můžeme proto předpokládat, že

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = n,$$

a provést důkaz pouze pro tento případ. S ohledem na komutativitu sčítání a násobení a předem vyloučené případy stačí v uvažovaném případě ukázat, že platí $x_1 x_2 \dots x_n < 1$. Pro $n = 2$ jsme tvrzení již dokázali, udělejme to ale ještě jednou. Čísla x_1, x_2 můžeme po eventuální vzájemné výměně napsat jako $x_1 = 1 - \varepsilon$, $x_2 = 1 + \varepsilon$, pro $0 < \varepsilon < 1$, a platí

$$x_1 x_2 = 1 - \varepsilon^2 < 1 = \left(\frac{(1 + \varepsilon) + (1 - \varepsilon)}{2} \right)^2.$$

Nechť tedy tvrzení platí pro jisté $n \in \mathbb{N}$; ukážeme, že pak platí i pro $(n + 1)$, čímž bude důkaz indukci dokončen. Předpokládejme, že platí

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} = n + 1,$$

přičemž budeme mít sčítance, kteří nejsou vesměs rovny 1. S ohledem na komutativitu můžeme předpokládat, že

$$x_{n+1} = 1 - \varepsilon < 1, \quad x_n = 1 + \eta > 1$$

pro $0 < \varepsilon < 1$, $0 < \eta$. Nyní zavedeme $x'_n = x_n + x_{n+1} - 1 = 1 + \eta - \varepsilon$, platí tedy $x_1 + x_2 + \dots + x'_n = n$, a podle indukčního předpokladu $x_1 x_2 \dots x'_n \leq 1$. Dále si všimneme, že

$$x_n x_{n+1} = (1 + \eta)(1 - \varepsilon) = (1 + \eta - \varepsilon) - \eta\varepsilon < x'_n,$$

platí tedy

$$x_1 x_2 \dots x_{n+1} < x_1 x_2 \dots x'_n \leq 1$$

a indukční krok je tak dokončen. Rovnost nemůže nastat v jiném případě, než který jsme předem vyloučili, tj. $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Důkaz je tedy hotov.

Nyní už máme veškerý matematický aparát potřebný k tomu, abychom mohli řešit problém existence limity $(1 + 1/n)^n$ pro $n \rightarrow \infty$. Nejprve si všimneme monotonie v chování tohoto výrazu.

3.4. Věta. Položme:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad n = 1, 2, \dots$$

Pak je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí a posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající.

Důkaz. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí právě tehdy, když pro každé n je $a_n < a_{n+1}$. Důkaz provedeme pomocí AG-nerovnosti (Lemma (3.3)), kterou použijeme na součin n činitelů $(1 + 1/n)$ a 1. Budeme mít

$$\sqrt[n+1]{x_1 x_2 \dots x_{n+1}} = \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

a dále

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + \dots + x_{n+1}}{n+1} &= \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1} = \\ &= \frac{(n+1) + 1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Na základě lemmatu (3.3) platí $\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < 1 + \frac{1}{n+1}$, (platí ostrá nerovnost, protože činitele si nejsou vesměs rovni); odtud umocněním obou stran nerovnosti na $n+1$ dostaneme:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Tedy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost.

Pro druhou část důkazu položme $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1 + \frac{1}{n+1}$, $x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2$. Potom

(3.5)

$$\begin{aligned} \sqrt[n+1]{x_1 x_2 \dots x_{n+1}} &= \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2} = \\ &= \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} \end{aligned}$$

a

$$\frac{x_1 + \dots + x_{n+1}}{n+1} = \frac{n\frac{n+2}{n+1} + \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2}{n+1} \stackrel{\text{ozn.}}{=} M_{n+1}$$

Po jednoduché úpravě dostaneme:

$$\begin{aligned}
 M_{n+1} &= \frac{(n+1)^3 + (n+1)^2 + (n+1) + 1}{(n+1)^3} = \\
 (3.6) \quad &= 1 + \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} \right] \leq \\
 &\leq 1 + \underbrace{\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots + \frac{1}{(n+1)^k} + \dots \right]}_{\text{geometrická řada s kvocieniem } \frac{1}{n+1}} = 1 + \frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

Z (3.5) a (3.6) na základě lemmatu 3.3 vyplývá $\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} < 1 + \frac{1}{n}$,
odtud umocněním obou stran nerovnosti na $n+1$ dostaneme:

$$b_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Tedy $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající posloupnost. Tímto je důkaz věty hotov.

Zřejmě pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n$, a proto je pro každé $n \in \mathbb{N}$ $a_n < b_n \leq b_1 = 4$. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy shora omezená a podle předchozí věty také rostoucí. Už víme (na základě věty (3.1)), že posloupnost s takovými vlastnostmi má konečnou limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

kterou jsme již dříve označili e . Dále si všimněme, že

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \\
 &= \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)}_1 \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n
 \end{aligned}$$

Tedy

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

a vzhledem k tomu, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$) je rostoucí (klesající) posloupnost, platí:

$$(3.7) \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Nerovnosti (3.7) poskytují možnost určit přibližně hodnotu čísla e , např. pro $n = 1$ dostaneme $2 < e < 4$, pro $n = 2$ zase $\frac{9}{4} < e < \frac{27}{8}$ atd. Ale my už víme, že to není zrovna nejvhodnější postup pro výpočet čísla e . V následující kapitole si řekneme něco o postupu pohodlnějším, jakým je počítání e pomocí nekonečné řady.

Kapitola 4.

Pohodlný postup pro výpočet e

V Kapitole 2. našeho povídání jsme si ukázali, jak se dá elegantně spočítat $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pomocí nekonečné řady $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Využijeme tohoto poznatku a ukážeme si, jak se dá ještě jiným způsobem dopracovat k existenci limity $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ a jaké z toho plynou důsledky.

Nejprve ukážeme, že posloupnost

$$(4.1) \quad s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

konverguje (má limitu), když n roste nade všechny meze. Součet $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ (1 se dá napsat jako $\frac{1}{0!}$) roste s každým přidaným členem, máme tedy $s_n < s_{n+1}$ pro každé n ; t.j. posloupnost s_n je monotónně rostoucí. Počínaje $n = 3$ platí také $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n > 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{n-1}$, proto

$$(4.2) \quad s_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

pro $n = 3, 4, 5, \dots$. V tomto součtu členy počínaje druhým v pořadí tvoří členy geometrické řady s kvocientem $1/2$. Součet této řady je $(1 - 1/2^n)/(1 - 1/2) = 2(1 - 1/2^n) < 2$. Máme proto $s_n < 1 + 2 = 3$, což ukazuje, že posloupnost s_n je shora omezena trojkou (t.j. hodnoty s_n nikdy nepřevýší 3). Nyní použijeme známé tvrzení z analýzy (viz věta ()): Každá omezená monotónně rostoucí posloupnost má limitu pro $n \rightarrow \infty$. Tedy s_n konverguje (blíží se) k limitě S . Z (4.1) a (4.2) je ihned vidět, že S leží mezi 2 a 3.

Nyní uvažujme posloupnost $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Ukážeme, že tato posloupnost konverguje ke stejné limitě jako s_n . Podobně jak jsme to udělali v Kapitole 2. použijeme na výraz $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ binomickou větu:

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2!} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Protože hodnoty výrazů v závorkách jsou vždy menší než 1, máme $a_n \leq s_n$ (ve skutečnosti $a_n < s_n$ počínaje $n = 2$). Proto posloupnost a_n je rovněž shora omezená. Navíc a_n roste monotónně, jak jsme již ukázali v jedné z předchozích kapitol. Tedy a_n má limitu pro $n \rightarrow \infty$. Označíme ji písmenem A .

Nyní ukážeme, že $S = A$. Protože $s_n \geq a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, máme $S \geq A$. Teď ukážeme, že stejně tak platí i $S \leq A$. Nechť $m < n$ je pevně zvolené přirozené číslo. Vezmeme prvních $m + 1$ členů posloupnosti a_n

$$1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2!} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{m!}$$

Protože $m < n$ a všechny členy jsou kladné, je poslední součet menší než a_n . Když teď necháme n neomezeně růst a m podržíme pevné, bude se součet blížit s_m , zatímco a_n se bude blížit A . Máme tedy $s_m \leq A$, a tudíž $S \leq A$. Protože platí zároveň $S \geq A$ a $S \leq A$, vyplývá z toho $S = A$, což jsme chtěli dokázat. Limitu A jsme již předem označili e . Je tedy

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right)$$

Je na čase, abychom si ukázali, v čem tkví výhoda počítání e z této nekonečné řady. Z tohoto důvodu vezměme v úvahu s_n z (4.1) a navíc položíme

$$s_k = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}.$$

Pro $n > k$ vzniká s_k z s_n tím, že ve výrazu pro s_n ponecháme vpravo z $n+1$ sčítanců pouze prvních $k+1$ sčítanců, takže

$$s_n > s_k \quad \text{pro } n > k.$$

Můžeme tedy napsat

$$(4.3) \quad s_n = s_k + r_{k,n},$$

kde

$$r_{k,n} = \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \cdots + \frac{1}{(k+1)(k+2) \cdots (n-1)n} \right).$$

Tento zbytek odhadneme shora a to tak, že všechny výrazy v závorkách nahradíme $k+1$, je totiž $\frac{1}{k+2} \leq \frac{1}{k+1}$, atd. Dostaneme

$$r_{k,n} \leq \frac{1}{k!} \sum_{m=1}^{n-k} \frac{1}{(k+1)^m}.$$

Položíme-li $\frac{1}{k+1} = q$, je

$$\begin{aligned} r_{k,n} &\leq \frac{1}{k!} \sum_{m=1}^{n-k} \frac{1}{q^m} = \frac{1}{k!} \underbrace{(q + q^2 + \cdots + q^{n-k})}_{\text{členy geometrické posl.}} = \\ &= \frac{1}{k!} \frac{q(1 - q^{n-k})}{1 - q} < \frac{1}{k!} \frac{q}{1 - q}. \end{aligned}$$

Dosadíme zpátky za q a po jednoduché úpravě dostaneme $r_{k,n} < \frac{1}{k \cdot k!}$. Podle (4.3) je tedy $s_n \leq s_k + \frac{1}{k \cdot k!}$. Vtip je v tom, že pro všechna čísla s_n od $(k+1)$ -vého počínaje, tj. pro $s_{k+1}, s_{k+2}, s_{k+3}, \dots$, dostáváme tutéž nerovnost, neboť pravá strana nezávisí na n . A proto také $e \leq s_k + \frac{1}{k \cdot k!}$. Pro každé celé $k \geq 3$ je tedy

$$s_k \leq e \leq s_k + \frac{1}{k \cdot k!}, \quad \text{tj. } 0 \leq e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} \right) \leq \frac{1}{k \cdot k!}.$$

Ježto pro větší hodnoty k je $\frac{1}{k \cdot k!}$ velmi blízko nule, lze takto číslo e velmi pohodlně počítat. Např. $\frac{1}{10 \cdot 10!} < \frac{3}{10^8}$; odtud vypočteme e s chybou menší než 10^{-7} (je tedy $|e - 2.7182818| < 10^{-7}$). Pro $k = 14$ dostáváme číslo e s chybou menší než 10^{-12} ; zkuste to propočítat, vyjde pro e přibližná hodnota 2.71828182845...

Kapitola 5.

Ještě něco navíc pro náročné

Komu náhodou nestačí dvě vyjádření čísla e , nemusí zoufat, protože příběh e zdaleka nekončí. Vzpomeneme ještě dílo Leonharda Eulera (1707 – 1783), jehož jméno je těsně spjato s pojmenováním čísla e – Eulerovo číslo. O tom, že toto pojmenování není náhodné a je zcela zasloužené, se zmíníme v dalších částech článku. Nyní se zaměříme na Eulerovo dílo *Introductio*, v němž autor pojednává o jiném druhu nekonečného procesu, než s jakým jsme se doposud setkali, a jmenovitě o nekonečných řetězových zlomcích.

Vezměme například zlomek $13/8$. Můžeme jej napsat jako $1 + 5/8 = 1 + 1/(8/5) = 1 + 1/(1 + 3/5)$, a v tomto procesu bychom mohli dále pokračovat. Máme tedy:

$$\frac{13}{8} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{5}}$$

Euler dokázal, že každé racionální číslo se dá zapsat jako konečný řetězový zlomek, zatímco iracionální číslo se dá znázornit pomocí nekonečného řetězového zlomku, tj. kde řetěz zlomků nikdy nekončí. Například pro iracionální číslo $\sqrt{2}$ máme:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Euler také ukázal způsob, jak zapsat nekonečné řady ve formě nekonečných řetězových zlomků, a obráceně. Pro číslo e použil vyjádření pomocí nekonečné řady $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$, a našel tak nejenom zápis e pomocí řetězového zlomku, ale také mnoho dalších, které s tímto číslem souvisejí. Pro ukázkou uvádíme dvě z nich:

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3 + \frac{3}{4 + \frac{4}{5 + \dots}}}}}$$

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}}}}$$

Všimněme si nápadné pravidelnosti ve vyjádření čísla e ve formě řetězového zlomku. Mohlo by to svádět k domněnku, že tak je tomu vždycky. Ale není to bohužel pravda, číslo e patří spíše mezi výjimky (stejně jako výše uvedená $\sqrt{2}$).

Komu by se nelíbilo, že u vyjádření e se v čitatelích zlomků vyskytují i jiná čísla než 1, nabízím ještě jedno řešení.

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}}$$

5.1. Poznámka. Možná se někdy setkáte s jiným zápisem řetězového zlomku. Je to právě pro případ, že jsou v čitatelích samé jedničky, takže se v zápise používají pouze čísla, která se přičítají ke zlomkům. V našem případě

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, \dots].$$

Můžeme použít i obecný zápis

$$e = [2; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots]$$

kde $a_{3m} = a_{3m-2} = 1$, $a_{3m-1} = 2m$ ($m = 1, 2, \dots$).

Kapitola 6.

Kvadratura hyperboly

V první kapitole našeho povídání jsme si ukázali, jak mohou finanční záležitosti přispět k rozvoji matematiky. Pomocí nich jsme našli číslo e , které, jak ještě dále uvidíme, má zajímavé vlastnosti a především má obrovský význam pro matematiku. Tato kapitola by nás měla přesvědčit, že i záležitosti, které zdaleka nesouvisejí s tím, co už tady bylo řečeno, mohou vést ke stejnému číslu. Zabruslíme tak trochu do geometrie.

Snad všichni zaregistrovali, že kapitola má název „Kvadratura hyperboly“, ale asi málokterý z Vás zná význam obou těchto slov. Takže na začátku by bylo vhodné si k tomu něco říci. Kvadraturou nazýváme nalezení plošného obsahu uzavřeného rovinného útvaru. Slovo se vztahuje přímo k charakteru problému: vyjádřit plochu v jednotkách plochy, tj. ve čtvercích (kvadrátech). Řekové chápali tento úkol tak, že daný útvar má být přetvořen na nějaký ekvivalentní, jehož plochu lze najít pomocí základních pravidel. Uvedeme jednoduchý příklad: předpokládejme, že chceme najít obsah obdélníku se stranami a a b . Pokusíme se jej přetvořit na čtverec stejného obsahu, musí tedy platit $x^2 = ab$ nebo $x = \sqrt{ab}$. Sestrojit úsečku této délky není pro nás žádný problém. Stačí si vzpomenout na Eukleidovu větu o výšce ($v^2 = c_a \cdot c_b$) a pak již pomocí pravítka a kružítka provedeme jednoduchou konstrukci, jak je ukázáno na obr. 1.

Obr. 1

Umíme tedy udělat kvadraturu jakéhokoli obdélníku, a tudíž i jakéhokoli rovnoběžníku a trojúhelníku, protože z těchto útvarů lze získat obdélník jednoduchou konstrukcí (viz obr. 2). Plyne z toho i kvadratura libovolného mnohoúhelníku, protože každý mnohoúhelník se dá rozdělit na konečný počet trojúhelníků.

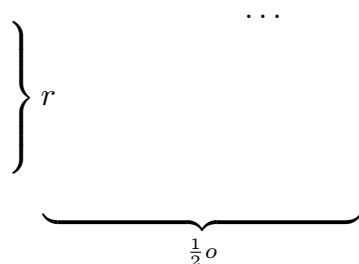
Obr. 2a

Obr. 2b

Obr. 2c

S průběhem času k vyřešení některých problémů nestačil pouze tento ryze geometrický pohled, ale začalo se směřovat k odhadům. Ovšem sestrojování ekvivalentních útvarů se bralo v úvahu až tehdy, když se ukázalo, že při sestrojování byly použity pouze základní konstrukce. Vhodným příkladem toho, kdy tomu tak nebylo, je například Archimedova exhaustivní metoda. Zřejmě jste se s tímto pojmem ještě nesetkali, řekněme si tedy alespoň, že to byla metoda, která zahrnovala nekonečně mnoho kroků. Hezkým příkladem může být počítání obsahu kruhu, kdy se kruh rozdělí na výseče, které se nahradí trojúhelníky, jejichž jeden vrchol je ve středu kruhu a ostatní dva jsou body zvolené na jeho obvodu. Tyto trojúhelníky se pak vhodným způsobem poskládají (viz obr. 3), a v limitním případě, kdy kruh rozdělíme na nekonečně mnoho stejných trojúhelníků, dostaneme obdélník, jehož obsah

už umíme spočítat.



Obr. 3

Tato metoda ale z výše uvedených důvodů nemohla projít – zahrnovala totiž nekonečně mnoho kroků a nebylo jí možno dosáhnout pomocí ryze geometrických prostředků. Od tohoto omezení bylo upuštěno až kolem roku 1600, kdy do matematiky vstoupily infinitezimální procesy, tj. procesy souvisící s nekonečně malými veličinami.

Mezi útvary, které tvrdohlavě vzdorovaly všem pokusům o kvadraturu, patří bezpochyby hyperbola. Možná jste někdy slyšeli definici, že je to množina bodů, které mají stejný rozdíl vzdáleností od dvou pevně daných bodů (tzv. ohnisek). Taky jste se mohli setkat s tvrzením, že grafem nepřímé úměrnosti je právě hyperbola. Z ryze geometrického hlediska je hyperbola křivka získaná tak, že kužel protneme rovinou, která svírá s jeho základnou úhel větší než jeho strana (odtud předpona „hyper“, což znamená *více než*). Kužel si možná mnozí z Vás představují jako zmrzlinový kornout, my však na rozdíl od něj uvažujeme kužel, který se skládá ze dvou částí, jež mají společnou osu (viz obr. 4). Proto má hyperbola dvě oddělené větve, které jsou symetrické. Navíc k hyperbole lze najít dvojici přímek s ní spojených, jmenovitě jsou to dvě tečny k této křivce s „bodem dotyku“ v nekonečnu. Když se pohybujeme po větvích směrem od středu, blížíme se stále více k jedné z těchto přímek, ale ve skutečnosti ji nikdy nedosáhneme. Těmito přímkám se říká *asymptoty* hyperboly (v řečtině toto slovo znamená „nesetkat se“).

Obr. 4

Řekové studovali řezy kužele pouze z geometrického hlediska. V sedmáctém století však došlo k objevení analytické geometrie, a studium geometrických útvarů, zvláště křivek, se stalo součástí algebry. Místo křivek samotných se zavedly rovnice spojené s x -ovou a y -ovou souřadnicí bodů na křivce. Ukázalo se, že každý řez na kuželi (průnik roviny s kuželovou plochou) lze vyjádřit pomocí kvadratické rovnice o dvou proměnných, jejíž obecný tvar je $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey = F$. Můžeme takto napsat např. rovnici kružnice, elipsy, hyperboly, paraboly nebo dvojice různoběžných přímek. Pro ilustraci vezmeme $A = B = F = 1$ a $C = D = E = 0$ a dostaneme rovnici $x^2 + y^2 = 1$, jejímž grafem je kružnice se středem v počátku a poloměrem 1 (jednotková kružnice). Hyperbola na obr. 5 odpovídá případu $A = B = D = E = 0$ a $C = F = 1$; její rovnice je $xy = 1$ (nebo $y = 1/x$), a její asymptoty jsou osa x a osa y . Jelikož jsou její asymptoty na sebe kolmé, dostala pojmenování rovnoosá hyperbola.

$$y \quad y = \frac{1}{x}$$

Obr. 5

Již Archimedes se pokoušel o kvadraturu hyperboly, ovšem bezúspěšně. Když na počátku 17. století byla objevena metoda infinitesimálního počtu, matematikové obnovili pokusy o dosažení tohoto cíle. Vzhledem k tomu, že hyperbola je na rozdíl od kružnice či elipsy křivka, která „utíká” do nekonečna, musíme si vyjasnit, co míníme v tomto případě kvadraturou. Na obr. 6 je znázorněna jedna větev hyperboly $xy = 1$; na x -ové ose jsme vyznačili jeden pevný bod $x = 1$ a libovolný bod $x = t$.

Obr. 6

Plochou pod hyperbolou budeme rozumět plochu ohraničenou grafem funkce $xy = 1$, osou x , a svislými přímkami (úsečkami) $x = 1$ a $x = t$. Samozřejmě číselná hodnota této plochy bude záviset na volbě t , a tudíž plocha bude funkcí t . Označme ji jako $A(t)$. Měli bychom tedy nalézt tuto funkci. Zvolíme cestu historickou a podíváme se, jak se s průběhem času vypořádali s tímto problémem matematikové.

Kapitola 7.

René Descartes a Pierre de Fermat

Kolem počátku 17. století se několik matematiků pokoušelo nezávisle na sobě řešit problém kvadratury hyperboly. Byli mezi nimi Pierre de Fermat (1601 – 1665) a René Descartes (1596 – 1690), kteří spolu s Blaise Pascallem (1623 – 1662) vytvořili tzv. velký francouzský triumvirát matematiků v letech ještě před vznikem analýzy. Stejně jako Bach a Händel v hudbě jsou Descartes a Fermat zmiňováni dohromady a považováni za jakási matematická dvojčata. Nicméně nehledě na to, že oba byli Francouzi a téměř současníci, těžko by někdo hledal dva lidi sobě méně podobné. Descartes začal svůj profesionální život jako voják pozorujíc akce v mnoha regionálních válkách, které touto dobou zuřily v Evropě. Často měnil své názory a prohlášení v závislosti na tom, co zrovna vyžadovala služba. Jednou v noci měl podivný sen – vizi, že mu Bůh svěřil klíč od tajemství vesmíru. A tak se Descartes ještě v době vojenské služby obrátil k filozofii a brzy se stal významným filozofem v Evropě. Jeho motto: „Myslím, tedy jsem.“ vyjadřuje jeho víru v racionální svět ovládaný rozumem a matematickým vzorem. Matematika byla tedy hned po filozofii jeho druhým nejdůležitějším zájmem. Publikoval pouze jednu významnou matematickou práci, ale stačilo to k tomu, aby ovlivnil směr vývoje matematiky. V jeho díle *La Géométrie*, publikovaném v roce 1637, představil světu analytickou geometrii.

Klíčovou myšlenkou analytické geometrie – napadla Descarta, když jedno ráno ležel v posteli a pozoroval mouchu lezoucí po stropě, – je popsat každý bod v rovině dvěma čísly, jež vyjadřují vzdálenosti tohoto bodu od dvou přímk – souřadných os (obr. 7).

Obr. 7

Tato čísla, tzv. souřadnice bodu, umožnila Descartovi zapsat geometrické vztahy ve tvaru algebraických rovnic. Souřadnice bodů např. na křivce považujeme za proměnné a všechny obecné vlastnosti křivek vyjádříme pomocí rovnic právě s těmito proměnnými. Uvedeme jednoduchý příklad: jednotková kružnice je množina bodů (v rovině), které jsou vzdálené od středu právě o jednu jednotku. Když zvolíme střed kružnice za počátek souřadného systému a použijeme Pythagorovu větu, dostaneme rovnici jednotkové kružnice $x^2 + y^2 = 1$. Descartes to ovšem neměl tak jednoduché jako my v dnešní době, protože jeho souřadný systém nebyl pravoúhlý, ale šikmý, a navíc uvažoval pouze kladné souřadnice, tj. body v prvním kvadrantu.

La Géométrie měla ohromný vliv na následující generace matematiků, mezi nimi byl i mladý Isaak Newton, který studoval latinský překlad tohoto díla. Descartova práce se v mnohém blížila klasické řecké geometrii, jejíž podstatou byly geometrické konstrukce a důkazy. Tímto se geometrie odlišovala od algebry a později i od analýzy.

Pierre de Fermat byl Descartův pravý opak. Zatímco Descartes stále měnil místo pobytu, svou oddanost vůči něčemu a své zaměstnání, Fermat je příkladem stability; právě proto, že měl tak neměnný život, existovalo o něm

málo historek. Začal budovat svoji kariéru jako veřejný sluha a v roce 1631 se stal členem *parlementu* (správní rady) města Toulouse. A na tomto místě zůstal do konce života. Ve svých volných chvílích studoval jazyky, filozofii, literaturu a poezii, ale jeho největší oddanost patřila matematice, kterou považoval za jistý druh intelektuální relaxace. I když mnozí matematici jeho doby bylo zároveň fyziky nebo astronomy, Fermat byl ztělesněním ryzí matematiky. Zabýval se hlavně teorií čísel, „nejryzejší“ ze všech větví matematiky. K jeho nejdůležitějším příspěvkům do matematiky patří bezpochyby tvrzení, že rovnice $x^n + y^n = z^n$ nemá řešení v celých kladných číslech mimo případ, kdy $n = 1$ nebo $n = 2$. Případ pro $n = 2$ znali už Řekové, a to ve spojení s Pythagorovou větou. Věděli, že existují jisté pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými stranami, znali např. trojúhelníky se stranami 3, 4, 5 nebo 5, 12, 13 (vskutku $3^2 + 4^2 = 5^2$ a $5^2 + 12^2 = 13^2$). Bylo tedy přirozené položit si otázku, zda může mít podobná rovnice pro vyšší mocniny x , y , a z také celočíselné řešení (vyloučíme triviální případy 0, 0, 0 a 1, 0, 1). Fermatova odpověď zněla: ne. Na okraji Diofantova díla *Arithmetica*, klasické práce z teorie čísel napsané v Alexandrii v třetím století n.l. a přeložené do latiny v 1621, knihy, kterou Fermat vlastnil, se našly Fermatovy poznámky. Stálo tam: „Rozdělit třetí mocninu na dvě jiné třetí mocniny, čtvrtou mocninu, anebo obecně jakoukoli mocninu na dvě mocniny se stejným mocnitelem větším než 2 je nemožné. Našel jsem skvělý důkaz tohoto tvrzení, ale okraj je příliš úzký, než aby to obsáhl.“ Důkaz se ovšem nenalezl ani nikde jinde, a tak tvrzení, známé jako *Velká Fermatova věta* zůstalo bez důkazu až do nedávné doby.

Vraťme se ale nyní k našemu problému, ke kvadratuře. Fermat se zajímal o kvadraturu křivek, jejichž obecná rovnice je $y = x^n$, kde n značí celé kladné číslo. Křivky s touto rovnicí jsou často nazývány *obecné paraboly* (parabola samotná je pro případ $n = 2$). Fermat aproximoval plochu pod křivkou řadou obdélníků, jejichž základny tvoří geometrickou posloupnost. Tato metoda se velmi podobá Archimedově exhaustní metodě, ale na rozdíl od svého předchůdce se Fermat nezarazil u součtu nekonečné řady. Na obr. 8 vidíme část křivky o rovnici $y = x^n$, jmenovitě mezi body $x = 0$ a $x = a$ na ose x .

Nyní interval $(0, a)$ rozdělíme na nekonečně mnoho intervalů body, které označíme ... K, L, M, N , a to tak, že když postupujeme zprava dostaneme klesající posloupnost intervalů: $0N = a$, $0M = \frac{a}{r}$, $0L = \frac{a}{r^2}$, atd, a r je kladné číslo menší než 1. Funkční hodnoty v těchto bodech jsou pak: a^n , $(ar)^n$, $(ar^2)^n$, Z toho už je jednoduché spočítat obsah každého obdélníku, a pak sečíst tyto obsahy pomocí vztahů pro součet geometrické řady ($s = a_1/(1 - q)$). Výsledkem je:

$$(7.1) \quad A_r = \frac{a^{n+1}(1 - r)}{1 - r^{n+1}} ar^2$$

kde index r u A znamená, že plocha závisí na volbě r .

Obr. 8

Dále Fermat usoudil, že pro lepší shodu mezi obsahy obdélníků a plochou pod křivkou bude muset zmenšit šířku každého obdélníku (obr. 9). Abychom

toho dosáhli, přiblížíme r k 1 – čím blíže 1 se bude r nacházet, tím lépe bude plocha pod křivkou aproximována.

Obr. 9

Ale pozor, když $r \rightarrow 1$, rovnice se blíží nedefinovanému výrazu $0/0$. Ovšem Fermat byl schopen obejít tuto obtížnost, protože si všiml, že jmenovatel rovnice (7.1), $1 - r^{n+1}$, se dá rozložit na součin $(1 - r)(1 + r + r^2 + \dots + r^n)$. Když teď zkrátíme $(1 - r)$ v čitateli a jmenovateli zlomku, rovnice (7.1) přejde v

$$A_r = \frac{a^{n+1}}{1 + r + r^2 + \dots + r^n}.$$

Když necháme r , aby se blížilo 1, pak se každý člen ve jmenovateli zlomku blíží 1, takže dostaneme vztah

$$(7.2) \quad A = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Každý student analýzy by si teď měl všimnout, že jsme se nyní dopracovali ke známému integračnímu vztahu $\int_0^a x^n dx = a^{n+1}/(n+1)$. Nicméně musíme pamatovat, že Fermatova práce byla napsána kolem roku 1640, tj. asi 30 let předtím, než Newton a Leibniz zavedli tento vztah jako součást jejich integrální analýzy.

Fermatova práce byla výrazným zlomem v tehdejší matematice, protože neřešila problém kvadratury pouze pro jednu křivku, ale pro celou „rodinu“ křivek, jejichž obecná rovnice je $y = x^n$ pro celé kladné hodnoty n . Dále nepatrnou změnou postupu Fermat ukázal, že rovnice (7.2) zůstává platná, i když n je záporné celé číslo. Uvažujme plochu pod křivkou od $x = a$ (kde $a > 0$) do nekonečna. Když je n záporné celé číslo, řekněme $n = -m$ (kde m je kladné), dostaneme opět rodinu křivek s obecnou rovnicí $y = x^{-m} = 1/x^m$, které často nazýváme zobecněné hyperboly. Jak vidíme Fermatův vztah funguje, i když v tomto případě je to spíše pozoruhodné, protože rovnosti $y = x^m$ a $y = x^{-m}$, navzdory jejich nápadné podobnosti, představují docela odlišné typy křivek; první z nich jsou všude spojitě, kdežto ty druhé v bodě $x = 0$ ubíhají do nekonečna a v důsledku toho tam vzniká zlom. Asi si dokážete představit Fermatovu radost z toho, že nalezený vztah neplatí pouze pro kladné hodnoty n . O to větší bylo zklamání, když zjistil, že je tady jedna překážka, jmenovitě Fermatův vztah nefunguje pro jeden důležitý případ, a to pro hyperbolu $y = 1/x = x^{-1}$. Je to proto, že pro $n = -1$ je jmenovatel v rovnici (7.2) roven 0. Ovšem Fermat na sobě nedal znát zklamání, a svůj objev sdělil světu slovy: „Říkám, že všechny plochy pod hyperbolami mimo jednu – Apolloniovu ($y = 1/x$) – můžeme spočítat metodou geometrických posloupností díky jejich podobnému tvaru a obecnému postupu.”

Řešení tohoto zvláštního případu našel jeden z méně známých Fermatových vrstevníků, Grégoire de Saint-Vincent (1584 – 1667), belgický jezuita, který věnoval velký kus ze svého života řešení problémů týkajících se kvadratury, především se věnoval kružnici (ukázalo se však, že zrovna tato

kvadratura nebyla správná). Jeho hlavní dílo, *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum conii*, sestává z tisíců vědeckých článků, které nechal Saint-Vincent za sebou, když utíkal před nájazdem Švédů v roce 1631. K práci se vrátil po deseti letech. Zpoždění² v publikování způsobilo problémy v určení Saint-Vincentovy priority v řešení některých problémů; objevilo se však, že byl první, kdo si všiml, že pro $n = -1$ mají obdélníky použité pro aproximaci plochy pod hyperbolou stejné plochy.

Obr. 10

Vskutku (viz obr. 10) šířky obdélníků, počínaje od N , jsou $a - ar = a(1 - r)$, $ar - ar^2 = ar(1 - r)$, ... a výšky obdélníků v N , M , L , ... jsou $a^{-1} = 1/a$, $(ar)^{-1} = 1/ar$, $(ar^2)^{-1} = 1/ar^2$, ...; plochy jsou tedy $a(1 - r) \cdot 1/a = 1 - r$, $ar(1 - r) \cdot 1/ar = 1 - r$, atd. Znamená to, že pokud vzdálenost od 0 roste geometricky, souhlasné plochy rostou aritmeticky – a zůstane to tak i v případě limity pro $r \rightarrow 1$ (tj. když uděláme přechod od diskrétních obdélníků ke spojitě hyperbole). Ale s takovým vztahem se v matematice setkáme pouze u logaritmů. Když tedy označíme $A(t)$ plochu pod hyperbolou od nějakého předem určeného bodu $x > 0$ (s výhodou se používá $x = 1$) k proměnnému bodu $x = t$, máme $A(t) = \log t$. Tak se v matematice objevil logaritmus jako funkce, zatímco do té doby se logaritmy používaly pouze pro počítací schémata.

Tak byla kvadratura hyperboly dokončena, konečně asi po tisíci letech, co tento problém poprvé nakousli Řekové. Nicméně jedna otázka zůstala otevřená: vztah $A(t) = \log t$ vskutku dává plochu pod hyperbolou jako funkci proměnné t , ale není vhodný pro číselné výpočty, protože z něj nevyplývá určení základu. Abychom mohli tento vztah použít v praxi, budeme muset základ logaritmu určit. Existuje vůbec takový základ? Situace je analogická jako v případě kruhu: víme, že obecný vztah mezi obsahem kruhu a jeho poloměrem je $A = kr^2$, ale nemůžeme libovolně zvolit hodnotu k . Takže musí existovat nějaký „přirozený“ základ, který určuje naši plochu. A tímto základem je právě e , jak ještě dále uvidíme.

Kapitola 8.

Je plocha pod hyperbolou konečná?

Než se pustíme do počítání s logaritmy a jejich základy, zůstaňme ještě na chvíli u hyperboly a ukažme si jednu hezkou interpretaci e . Eulerovo číslo e je s hyperbolou svázáno podobně jako tomu je u Ludolfova čísla π a kružnice. Uvažujme tedy rovinný útvar rozprostřený mezi hyperbolou s rovnicí $y = \frac{1}{x}$ a jejími asymptotami, tj. kladnými poloosami x a y . Na první pohled asi není zřejmé, zda je tato plocha konečná či nekonečná. Pokusíme se ji změřit, tj. rozdělit na rovinné útvary stejného obsahu. Vyjdeme z jednotkového čtverce, který se hyperboly dotýká jedním svým vrcholem v bodě se souřadnicemi $\langle 1, 1 \rangle$. Kde je třeba vést druhý svislý řez napravo od bodu 1, aby plocha získaného útvaru byla také jednotková?

Nebudeme Vás příliš napínat, a prozradíme výsledek hned na začátku. Hledaným bodem je ten, jehož vzdálenost od počátku souřadnic právě definuje číslo e (obr. 11).

Obr. 11

O tom, že je to pravda, se ihned přesvědčíme. Za tímto účelem rozdělíme osu x v geometrické posloupnosti, a to tak, že pro pevné přirozené n položíme $c_k = (1 + \frac{1}{n})^k$ (viz obr. 11). Nyní uvažujme obdélníky nad intervaly $[c_k, c_{k+1}]$. Obdélník, který leží celý uvnitř pásu má svislou stranu $\frac{1}{c_{k+1}}$ a obsah $(c_{k+1} - c_k) \cdot \frac{1}{c_{k+1}} = 1 - \frac{c_k}{c_{k+1}} = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Větší obdélník, který pás přesahuje, má svislou stranu $\frac{1}{c_k}$ a obsah $(c_{k+1} - c_k) \cdot \frac{1}{c_k} = \frac{c_{k+1}}{c_k} - 1 = \frac{1}{n}$. Označme P_m obsah pásu mezi osou x a grafem hyperboly nad intervalem $[1, c_m]$. Pak

$$(8.1) \quad \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_{k+1} - c_k}{c_{k+1}} < P_m < \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_{k+1} - c_k}{c_k}$$

$$\frac{m}{n+1} < P_m < \frac{m}{n}$$

Dosadíme-li do (8.1) $m = n$ a $m = n + 1$, dostaneme

$$\frac{n}{n+1} < P_n < 1 < P_{n+1} < \frac{n+1}{n}$$

a tedy $c_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ je menší než hledané číslo, a $c_{n+1} = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ je větší než toto číslo. Posloupnost c_k jsme definovali při pevném n , nyní nás však bude zajímat jen její n -tý a $(n+1)$ -tý člen. Tak dostáváme dvě posloupnosti a_n a b_n , mezi kterými je hledané číslo sevřeno.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Kdo pozorně četl naše povídání od začátku, jistě zjistil, že s těmito posloupnostmi jsme se již setkali. Ukázali jsme, že posloupnost $a_n = (1 + 1/n)^n$ je rostoucí a má limitu, kterou jsme označili e . Posloupnost $b_n = (1 + 1/n)^{n+1}$ byla klesající a její limita byla opět e . Vidíme tedy, že k číslu e vede i tato geometrická cesta.

8.1. Poznámka. V Kapitole 3. jsme dokazovali monotonii posloupností a_n a b_n pomocí AG-nerovnosti. Nyní se můžete přesvědčit, že se to dá udělat i pomocí jiného matematického aparátu, jmenovitě k důkazu lze použít binomickou větu.

Nerovnost $b_n > b_{n+1}$ budeme upravovat ekvivalentními úpravami:

$$\begin{aligned} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} &> \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \\ \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} &> \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} \\ \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} &> 1 + \frac{1}{n} \\ \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} &> 1 + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost získáme z binomického vzorce pro n -tou mocninu součtu

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + nab^{n-1} + b^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \end{aligned}$$

kde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$$

jsou binomické koeficienty. Binomický rozvoj $1 + \frac{1}{n(n+2)}^{n+2}$ sestává z kladných členů, takže je větší než jeho první dva členy $1 + \frac{1}{n}$.

Dále ukážeme, že $a_n < a_{n+1}$. Podle binomického vzorce

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2! \cdot n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3! \cdot n^3} + \dots + \frac{n!}{n! \cdot n^n} \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Zde je každý člen $(1 - \frac{k}{n})$ menší než odpovídající člen $(1 - \frac{k}{n+1})$ ve výrazu pro a_{n+1} , který však obsahuje ještě navíc poslední kladný člen. Je tedy

$$\begin{aligned} a_n &< 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = a_{n+1} \end{aligned}$$

takže $a_n < a_{n+1}$. Tímto je důkaz hotov.

V souvislosti se zápisem e ve tvaru nekonečné řady jsme si říkali, že se takto dá velmi výhodně počítat hodnota tohoto čísla, protože řada rychle konverguje. Toto tvrzení ještě podpoříme, když se podíváme, jak by to vypadalo při počítání e z posloupností a_n a b_n . Zřejmě platí

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) > \left(1 + \frac{1}{n}\right) = a_n.$$

Z toho

$$b_n - a_n = \frac{a_n}{n} < \frac{b_1}{n} = 4/n.$$

Nyní můžete sami porovnat, který ze způsobů počítání e je výhodnější. Připomeňme jenom, pro nekonečnou řadu závisela přesnost určení e na výrazu $\frac{1}{n! \cdot n}$.

Nyní ještě jedna poznámka: na začátku jsme si položili otázku, zda je plocha pod hyperbolou konečná či nikoli. Řekněme si tedy, že další úseky mezipásu jednotkového obsahu končí v bodech e^2 , e^3 , atd. Těchto úseků je nekonečně mnoho, takže obsah celého mezipásu je nekonečný. Uvažujme totiž rovinnou transformaci, která bodu se souřadnicemi $\langle x, y \rangle$ přiřazuje bod $\langle ex, y/e \rangle$. Tato transformace zkracuje svislé úsečky ve stejném poměru e v jakém prodlužuje vodorovné úsečky, obsah rovinných obrazců se tedy při ní nemění. Úsek mezipásu nad intervalem $[1, e]$ přitom přechází na následující úsek nad intervalem $[e, e^2]$.

V předchozí kapitole jsme odvodili, jak spočítat plochu pod křivkou, která má rovnici $y = x^n$, kde n je celé číslo, na intervalu od 0 do a . Dospěli jsme ke vztahu $A = a^{n+1}/(n+1)$, ten však nevyhovoval případu pro $n = -1$, kdy je jmenovatel $(n+1)$ roven 0. Jak jsme již uvedli, tento případ řešil Saint-Vincent. Zkoumal, jak se chová plocha pod hyperbolou na intervalu $\langle 0, t \rangle$, kde t je proměnná. Zjistil, že jediná funkce, která $A(t)$ vyhovuje je $A(t) = \log t$, protože pro ni platí vztah

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y.$$

Nám teď zbývá upřesnit tuto informaci, tedy nalézt základ tohoto logaritmu. Avšak po předchozích úvahách to nebude žádný problém. Našli jsme totiž číslo e , které má tu vlastnost, že plocha pod hyperbolou od 1 do tohoto čísla je rovna jedné. Musí tedy platit:

$$(8.2) \quad \log e = 1.$$

Rovnici (8.2) vyhovuje pouze logaritmus se základem e . Vzhledem k tomu, že právě on má významné postavení v matematice a v dalších příbuzných vědách, dostal zvláštní jméno – *přirozený logaritmus*. Velice často se označuje $\ln x$.

Kapitola 9.

O jedné vlastnosti čísla e

V této další kapitole se už zaměříme na záležitosti poněkud těžšího rázu. Bude to vyžadovat znalosti z diferenciálního počtu, zejména definice derivace a několika jednoduchých vět (např. Lagrangeova věta o střední hodnotě, kterou raději v průběhu zopakujeme). Dále budeme pracovat s pojmem obecné mocniny a^x . Její definice je těžká, ovšem vlastnosti, které budeme využívat, jsou obdobné jako u mocnin s celočíselným mocnitelem.

Pro začátek si opět připravíme potřebný aparát. Vyslovíme jednoduché lemma:

9.1. Lemma. Nechť d, x jsou reálná čísla $d > -1, x \geq 1$. Potom platí:

$$(9.1) \quad (1 + d)^x \geq 1 + xd$$

9.2. Poznámka. K důkazu budeme potřebovat Lagrangeovu větu o střední hodnotě. Připomeme si tedy její znění:

Nechť je funkce ψ spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, nechť dále derivace $\psi'(x)$ (vlastní nebo nevlastní) pro všechna $x \in (a, b)$. Potom existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že platí

$$\psi'(\xi) = \frac{\psi(b) - \psi(a)}{b - a}.$$

Důkaz zde provádět nebudeme. Najdete jej např. v [Ve].

Důkaz. (lemmatu 9.1) Položme $\psi(d) = (1 + d)^x$ pro $d > -1$ a x pevné ($x \geq 1$). Na základě věty o střední hodnotě platí:

$$(9.2) \quad \psi(d) - \psi(0) = d\psi'(\xi)$$

kde ξ leží mezi 0 a d .

Když $d > 0$, pak $0 < \xi < d$ a $\psi'(\xi) = x(1 + \xi)^{x-1} \geq x$ (je to proto, že výraz v závorce je vždy větší než 1, a když jej umocníme na $x - 1 \geq 0$, dostaneme číslo, které je větší nebo rovno 1). Z (9.2) tak ihned dostaneme (9.1).

Když $-1 < d < 0$, potom $-1 < d < \xi < 0, 0 < 1 + \xi < 1$, a tak $\psi'(\xi) = x(1 + \xi)^{x-1} \leq x$, $d\psi'(\xi) \geq d \cdot x$ (d je záporné číslo!) a platnost (9.1) je opět zřejmá.

A když $d = 0$, pak (9.2) přejde v triviální nerovnost $1 \geq 1$.

V této části článku uvedeme jistou vlastnost, která charakterizuje číslo e mezi všemi reálnými čísly.

9.3. Věta. Číslo e je jediným takovým kladným reálným číslem, které řeší nerovnici (s neznámou a a parametrem x)

$$(9.3) \quad a^x \geq 1 + x$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Důkaz provedeme ve dvou krocích.

1. Nejdříve předpokládejme, že číslo $a > 0$ je řešením nerovnice 9.3 pro každé $x \in \mathbb{R}$. Dokážeme, že $a = e$.

Položme v (9.3) $x = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$). Dostaneme:

$$a^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n},$$

odkud

$$a \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = a_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Nyní položme v (9.3) $x = -\frac{1}{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$). Dostaneme:

$$a^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

tedy $1 + \frac{1}{n} \geq a^{\frac{1}{n+1}}$, a odtud

$$a \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Opět jsme se dostali k nám již velmi dobře známým vztahům, víme tedy, že pokud necháme n růst do nekonečna, dostaneme $a = e$.

2. Nyní ukážeme, že číslo e má tu vlastnost, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$(9.4) \quad e^x \geq 1 + x$$

Pro $x = 0$ tento vztah zřejmě platí, protože $e^0 = 1$. Nechť je nejdříve $x > 0$. Zvolme přirozené číslo n tak, aby platilo $n \geq \frac{1}{x}$. Potom $nx \geq 1$ a na základě lemmatu 9.1 a nerovnosti $e \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (viz (3.7)) dostaneme:

$$e^x \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} \geq 1 + nx \frac{1}{n} = 1 + x$$

Nechť $x < 0$. Potom $-\frac{1}{x} > 0$. Zvolme přirozené číslo $n > 1$ tak, aby platilo $n \geq -\frac{1}{x}$. Potom $-nx \geq 1$ a znovu na základě lemmatu 9.1 dostaneme:

$$(9.5) \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-nx} \geq 1 + x$$

Předpokládejme, že (pro $n > 1$) platí:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(\frac{1+(n-1)}{n-1}\right)^n =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = b_{n-1} \geq e$$

(viz (3.7)).

Proto $e^{-x} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{nx}$ (x je záporné!), a tak na základě (9.7) platí:
 $y = x - 1$

$$e^x \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-nx} \geq 1 + x$$

Tímto je důkaz věty hotov. Na obr. 12 je tato vlastnost e^x znázorněna graficky.

Obr. 12

Jednoduchou aplikací předchozí věty dospějeme k následujícímu poznatku.

9.4. Věta. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$(9.6) \quad e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

9.5. Poznámka. Poznamenejme jenom krátce, že toto vyjádření se někdy považuje za definici e^x .

Důkaz. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby pro každé $n > n_0$ platila nerovnost $|x| < n$. Z toho pro další použití bude platit $\left|\frac{x}{n}\right| < 1$. V nerovnosti

$$(9.7) \quad e^t \geq 1 + t,$$

která platí pro každé $t \in \mathbb{R}$ (Věta 9.2), položíme $t = \frac{x}{n}$ ($n > n_0$). Dostaneme:

$$e^{\frac{x}{n}} \geq 1 + \frac{x}{n} > 0$$

odtud umocněním obou stran nerovnosti na n dostaneme:

$$(9.8) \quad e^x \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad (n > n_0)$$

Nechť n je přirozené číslo větší než $-x$. Napíšeme v (9.6) místo t číslo $-\frac{x}{n+x}$ ($n > n_0$ a $n > -x$). Dostaneme:

$$e^{-\frac{x}{n+x}} \geq 1 - \frac{x}{n+x} = \frac{n}{n+x} = \frac{1}{1 + \frac{x}{n}}$$

Protože jsme předpokládali $n \in \mathbb{N}$ a $n > -x$, můžeme psát $\frac{x}{n} > -1$. Z toho

$$e^{-\frac{x}{n+x}} \geq \frac{1}{1 + \frac{x}{n}} > 0.$$

Umocníme obě strany na n . Dostaneme:

$$e^{-\frac{nx}{n+x}} \geq \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n},$$

odtud a z (9.7) dostaneme (pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, $n > -x$) nerovnosti

$$(9.9) \quad e^{\frac{nx}{n+x}} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x.$$

Když $n \rightarrow \infty$, dostaneme $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{nx}{n+x}} = e^x$, dále $\lim_{n \rightarrow \infty} e^x = e^x$. Měli bychom si uvědomit, že pro limity posloupností s reálnými členy platí: když máme takové $g(x)$ a $h(x)$, že $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ a zároveň $\lim g(x) = \lim h(x) = A$, potom je také $\lim f(x) = A$ (viz [Ve]). Z tohoto poznatku a z (9.8) vyplývá tvrzení věty již bezprostředně.

Nyní se podobným způsobem, jak jsme to dělali v druhé kapitole, pokusíme e^x vyjádřit jinak. Na výraz (9.5) z předchozí věty budeme aplikovat binomickou větu. Po jednoduchých úpravách dostaneme

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= 1 + x + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)x^2}{2!} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)x^3}{3!} + \dots + \\ &+ \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)x^n}{n^n}. \end{aligned}$$

Protože my hledáme *limitu* výrazu $(1 + x/n)^n$ pro $n \rightarrow \infty$, necháme n , aby rostlo neomezeně. Pro velké hodnoty n se budou výrazy v závorkách blížit 1, dostaneme tedy

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Vidíme, že i výraz pro e^x se dá zapsat pomocí nekonečné řady. Poznamenejme ještě, že toto vyjádření se někdy považuje za definici e^x s tou výhodou, že vyhovuje i pro komplexní x .

Kapitola 10.

Význam čísla e v diferenciálním a integrálním počtu

Číslo e má významné postavení v diferenciálním a integrálním počtu jako základ exponenciální funkce $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x$ pro $x \in \mathbb{R}$. Je známo, že tato funkce má v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ derivaci $g'(x) = g(x)$ (stručně: $(e^x)' = e^x$), a pak také primitivní funkcí k funkci g je zase g .

Tyto poznatky se lehce dají odvodit z následující věty.

10.1. Věta. Platí:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Důkaz. Důkaz se dá jednoduše provést pomocí vět, kterými jsme se zabývali v předchozí kapitole.

Pro $|h| < 1$ a $n \geq 2$ dostaneme na základě binomické věty

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{h}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1} \frac{h}{n} + \binom{n}{2} \frac{h^2}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n} \frac{h^n}{n^n} \leq \\ &\leq 1 + \binom{n}{1} \frac{h}{n} + \binom{n}{2} \frac{h^2}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{|h|^3}{3!} + \cdots + \binom{n}{n} \frac{|h|^n}{n^n} = \\ &= 1 + h + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{h^2}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \frac{|h|^3}{3!} + \cdots + \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \frac{|h|^n}{n!} < \\ &< 1 + h + h^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) = 1 + h + h^2; \end{aligned}$$

výrazy v závorkách $(1 - 1/n)$, $\dots$, atd. jsou vždy menší než 1, takže jsme je shora odhadli jedničkou, faktoriály se dají odhadnout $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, takže dostaneme geometrickou řadu s kvocientem $\frac{1}{2}$, kterou můžeme jednoduše sečíst.

Na základě toho, co jsme odvodili, a věty 9.2 pro každé h , $|h| < 1$, platí:

$$1 + h \leq e^h < 1 + h + h^2$$

Odtud pro každé h , $|h| < 1$ dostaneme:

$$(10.1) \quad 1 \leq \frac{e^h - 1}{h} < 1 + h, \quad \text{když je } h > 0$$

$$(10.2) \quad 1 + h \leq \frac{e^h - 1}{h} < 1, \quad \text{když je } h < 0$$

Při $h \rightarrow 0$ se limita levé strany v (10.1) a (10.2) rovná číslu 1, podobně i limita pravé strany v (10.1) a (10.2) se rovná (při $h \rightarrow 0$) číslu 1. Proto se i limita prostředního členu rovná číslu 1. Tímto je důkaz věty hotov.

Jednoduchým důsledkem dokázané věty je následující věta, o jejímž významu jsme mluvili v úvodu této kapitoly.

10.2. Věta. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $(e^x)' = e^x$.

Důkaz. Podle definice derivace platí:

$$(10.3) \quad (e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

Zřejmě

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h}$$

a pak na základě věty limita vpravo v (10.3) je rovna e^x .

Kapitola 11.

Číslo a kus jejich historie

Historie čísla π sahá až do starověku, zatímco historie e překlenula teprve asi čtyři století. Číslo π vzniklo v souvislosti s problémem v geometrii: jak najít obvod a obsah kruhu. Původ e je méně *jasný* : sahá snad do šestnáctého století, kdy bylo zpozorováno, že výraz $(1 + 1/n)^n$ objevující se ve vztahu pro složené úrokování se blíží k určité limitě – kolem 2.71828 – když n roste. Tak se e stalo prvním číslem *definovaným* pomocí limitního procesu, $e = \lim(1 + 1/n)^n$ pro $n \rightarrow \infty$. Na chvíli se na nové číslo pohlíželo jako na jakýsi druh kuriozity; Saint-Vincentova úspěšná kvadratura hyperboly pak přivedla logaritmickou funkci a číslo e do popředí matematiky. Tento kritický krok přišel se vznikem diferenciálního počtu, kdy se ukázalo, že inverzní funkce k logaritmické – později označená jako e^x – je rovna své vlastní derivaci. Toto ihned dalo číslu e a funkci e^x ústřední postavení v analýze. Pak kolem roku 1750 Euler připustil imaginární a stejně tak komplexní hodnoty pro proměnnou x , a připravil tak cestu pro teorii funkcí komplexních proměnných s jejich pozoruhodnými vlastnostmi. Jedna otázka, nicméně, zůstává nezodpovězená: Přesně jaký druh čísla je číslo e ?

Od doby, kdy se začala zaznamenávat historie, lidé zápasili s čísly. Pro starověk – a pro některé kmeny i dnes – čísla znamenala pouze počet kusů. Vskutku, když někdo potřebuje čísla jen ke spočítání svého majetku, jsou čísla udávající počet kusů (čísla dnes nazývaná přirozená nebo celá kladná) postačující. Nicméně dříve nebo později se někdo musí setkat s měřením – nalezením obsahu parcely nebo objemu láhve vína, anebo vzdálenosti mezi dvěma městy. A je velmi nepravděpodobné, že právě takové měření bude mít výsledek v jednotkách. Tady je potřeba zavést zlomky.

Zlomky byly známy již Egypťanům a Babylóňanům, kteří také vynalezli geniální způsoby na jejich zaznamenávání a na počítání s nimi. Ale byli to Řekové, ovlivnění učením Pythagora, kteří učinili zlomky pilířem jejich matematického a filozofického systému, povznášejíc je do téměř mýtické roviny. Pythagorejci věřili, že všechno na světě – od fyziky a kosmologie po umění a architekturu – se dá vyjádřit pomocí zlomků, tj. racionálních čísel. Tato víra měla původ v Pythagorově zájmu o zákony v hudbě. Říká se, že Pythagoras experimentoval s různými předměty vydávajícími zvuk – struny, zvony, sklenice naplněné vodou, a našel kvantitativní vztah mezi délkou chvějící se struny a nasazením určité výšky tónu, který vydává: čím kratší struna, tím vyšší tón. Navíc zjistil, že obvyklé hudební intervaly (vzdálenosti mezi notami v notové osnově) jednoduše souvisí s poměry délek strun, například oktáva odpovídá délkovému poměru 2:1, kvinta poměru 3:2, kvarta 4:3, atd. Ale Pythagorovi nestačila tato souvislost mezi hudební škálou a racionálními čísly, on chtěl jít dál. Interpretoval svůj vynález tak, že podíly celých čísel se řídí nejenom hudební ladění, ale celý vesmír. Toto zvláštní překroucení logiky můžeme pochopit pouze tehdy, když budeme brát v úvahu, že se v řecké filozofii hudba – přesněji *teorie hudby* – řadila stejně vysoko na řebříček jako přírodní vědy, zejména matematika. Pythagoras tedy usou-

díl, že když hudba je založena na racionálních číslech, musí tomu takhle být v celém vesmíru. Racionální čísla tedy dominovala v řeckém pohledu na svět, tak jako racionální myšlení dominovalo v jejich filozofii (vskutku řecké slovo pro racionální je *logos*, a z něho pochází dnešní *logika*). Nebyl to samozřejmě pouze filozofický důvod, jenž položil racionální čísla do centra matematiky. Je totiž jedna důležitá vlastnost, která odlišuje tato čísla od čísel celých: racionální čísla tvoří *husté uspořádání* čísel. To znamená, že mezi jakékoli dva zlomky (nezáleží na tom, jak jsou od sebe vzdálené) můžeme vždy vložit další zlomek. Jako příklad vezměme zlomky $1/1000$ a $1/1001$. Tato čísla jsou jistě blízko sebe, jejich rozdíl je asi jedna milióntina. My však dokážeme jednoduše najít zlomek, který leží mezi nimi, např. $2/2001$. Tento proces bychom mohli znova opakovat a najít zlomek mezi $2/2001$ a $1/1000$ (např. $4/4001$), atd. Tedy mezi jakýmkoli dvěma zlomky je místo nejenom pro jeden další, ale pro nekonečně mnoho dalších zlomků. V důsledku toho můžeme výsledek jakéhokoli měření vyjádřit jen pomocí racionálních čísel. Je to proto, že přesnost měření je vždy omezena přesností měřícího zařízení. Slovo *hustota* přesně vyjadřuje způsob, jak jsou racionální čísla rozmístěna na číselné ose. Když vezmeme interval na číselné ose (jakkoliv malý), bude vždy obsazen nekonečně mnoha *racionálními body*, tj. body, jejichž vzdálenost od počátku je dána racionálními čísly. Přirozeně by se z toho dalo usuzovat, stejně jak to udělali Řekové, že celá číselná osa je obsazena pouze racionálními body. Ale v matematice se často stává, že co vypadá na první pohled správně, bývá vyvráceno. Jednou z nejvýznamnějších událostí v historii matematiky byl objev, že racionální čísla navzdory jejich hustotě zanechala díry na číselné ose – body, které racionálním číslům neodpovídají.

Objevení těchto mezer na ose je přisuzováno Pythagorovi, ačkoli to mohl být kterýkoli z jeho žáků, kdo tento objev učinil. Ale to se nikdy nedozvíme, protože Pythagorejci přisuzovali všechny své objevy svému mistrovi. Objev souvisel s úhlopříčkou jednotkového čtverce (čtverec, jehož strana je rovna 1). Označíme-li délku úhlopříčky jako x , z Pythagorovy věty dostaneme $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, tedy x je druhou odmocninou z 2 ($\sqrt{2}$). Pythagorejci samozřejmě předpokládali, že toto číslo odpovídá nějakému zlomku a zoufale se snažili o jeho nalezení. Avšak jeden z nich učinil překvapující objev, a to: $\sqrt{2}$ se zlomku rovnat nemůže. Tak byla objevena *iracionální čísla*.

Iracionalita čísla se dá dokázat různými způsoby, např. iracionalitu $\sqrt{2}$ Řekové dokázali geometricky. My se v Kapitole 12. také setkáme s důkazem iracionality, bude to však pro e .

Pythagorejci byli šokováni objevem iracionálního čísla, které se navíc dá jednoduše zkonstruovat pomocí pravítka a kružítka. Proto se rozhodli ponechat si tento objev pouze pro sebe. Ale legenda říká, že jeden z nich – Hippasus – se rozhodl jít vlastní cestou a oznámil světu existenci iracionálních čísel.

Brzy potom bylo nalezeno spoustu dalších iracionálních čísel, např. každá odmocnina z prvočísla je iracionální. Teorie iracionálních čísel se pak objevila v Desáté knize Eukleidova díla *Elementa*. Plně vyhovující teorie těchto čísel se však neobjevila až do roku 1872, kdy Richard Dedekind (1831 – 1916) publikoval svoji slavnou úvahu *Kontinuita a Iracionální čísla*.

Když sjednotíme racionální a iracionální čísla, dostaneme čísla reálná. Reálné číslo je jakékoli číslo, které se dá zapsat pomocí desetinného rozvoje (jako desetinné číslo). Existují tři typy těchto čísel: konečná čísla – např. 1.4, nekonečná, ale periodická – např. $0.2727\dots$, které se dá zapsat jako $0.\overline{27}$, a nekonečná a neperiodická čísla – např. $0.1010010001\dots$, kde se desetinná místa nikdy neopakují ve stejném pořadí. Je dobře známo, že první dvě skupiny obsahují racionální čísla, ta třetí čísla iracionální.

Od objevu iracionálních čísel uplynulo dvě a půl tisíciletí, po tuto dobu nedošlo v této oblasti k nějakému dalšímu důležitému objevu. Až kolem roku 1850 byl objeven nový druh čísel. Většina čísel, se kterými se setkáváme v elementární algebře, se dá považovat za řešení nějaké jednoduché rovnice: přesněji řešení polynomicke rovnice s celočíselnými koeficienty. Například čísla -1 , $2/3$ a $\sqrt{2}$ jsou řešeními polynomicke rovnice: $x + 1 = 0$, $3x - 2 = 0$, a $x^2 - 2 = 0$ (číslo $i = \sqrt{-1}$ také patří do této skupiny, protože je řešením rovnice $x^2 + 1 = 0$, my ovšem mluvíme pouze o číslech reálných). I složitě vypadající číslo jako $\sqrt[3]{1 - \sqrt{2}}$ patří do této skupiny, protože je řešením rovnice $x^6 - 2x^3 - 1 = 0$, což si můžete jednoduše ověřit. Reálné číslo, které je řešením polynomicke rovnice s celočíselnými koeficienty, se nazývá *algebraické*.

Každé racionální číslo a/b je algebraické, protože je řešením rovnice $bx - a = 0$. Tedy když číslo není algebraické, musí být iracionální. Obráceně to však neplatí, viděli jsme na příkladu $\sqrt{2}$. Položme si tedy otázku: Existuje nějaké nealgebraické číslo? Počátkem devatenáctého století už matematikové začali pochybovat o tom, že by odpověď mohla znít ano, protože žádné takové číslo nemohli najít. Říkalo se, že pokud takové číslo existuje, musí být velmi podivné.

V roce 1844 francouzský matematik Joseph Liouville (1809 – 1882) dokázal, že nealgebraické číslo vskutku existuje. Jeho důkaz, který není jednoduchý, mu umožnil vytvořit několik příkladů takových čísel. Jeden z nich je známý jako Liouvillovo číslo:

$$\frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \frac{1}{10^{4!}} + \dots,$$

jehož desetinné vyjádření je $0.1100010000000000000000000100\dots$. Jiným příkladem může být $0.123456789101112\dots$, kde desetinná místa tvoří přirozená čísla napsaná v řadě za sebou. Reálná čísla, která nejsou algebraická, se nazývají *transcendentní*. V tomto názvu není nic mýtického, je v něm pouze obsaženo, že tato čísla převyšují říši čísel algebraických.

Oproti iracionálním číslům, jejichž objev vycházel ze světského problému v geometrii, první transcendentní číslo bylo vytvořeno speciálně pro záměr demonstrovat, že takové číslo existuje; je to tedy něco jako „umělé“ číslo. Tohoto cíle bylo dosaženo, a tak se pozornost obrátila ke všedním číslům, speciálně π a e . Fakt, že tato dvě čísla jsou iracionální, byl známý po více než století: Euler v roce 1737 dokázal iracionalitu e a e^2 , a Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777), švýcarsko – německý matematik, dokázal to stejné pro π v roce 1768. Lambert ukázal, že funkce e^x a $\tan x$ (podíl $\sin x / \cos x$)

nemohou mít racionální hodnoty pro x racionální různé od 0. Nicméně protože $\tan \pi/4 = \tan 45^\circ = 1$ je racionální číslo, vyplývá z toho, že $\pi/4$ a tedy i π musí být iracionální. Lambert tušil, že π a e jsou transcendentní, ale sám to nedokázal.

Od té doby se začaly příběhy π a e proplétat. Sám Liouville dokázal, že e nemůže být řešením *kvadratické* rovnice s celočíselnými koeficienty. Ale tímto samozřejmě ještě nedokázal, že e je transcendentní – že není řešením žádné polynomicke rovnice s celočíselnými koeficienty. Tato otázka byla ponechána dalšímu francouzskému matematikovi, jímž byl Charles Hermite (1822 – 1901).

Hermite se narodil s vadou na noze, nevýhodou, která se obrátila v jeho prospěch, kvůli ní byl uznán neschopným pro vojenskou službu. Ačkoli jeho práce jako studenta na prestižní École Polytechnique nebyla brilantní, dokázal se stát jedním z neoriginálnějších matematiků druhé poloviny devatenáctého století. Jeho práce pokrývala široký okruh ploch, včetně teorie čísel, algebry a analýzy (jeho specialitou byly eliptické funkce, předmět vyšší analýzy), a jeho široký rozhled mu umožnil najít souvislosti mezi zdánlivě odlišnými poli. Kromě jeho bádání Hermite vydal několik matematických učebnic, které se staly klasickými. Jeho známý důkaz transcendence e byl publikován v roce 1873 v jeho vlastním životopise na více než třiceti stránkách. V něm Hermite podal vlastně dva odlišné důkazy, z nichž ten druhý byl přesnější. Uvedeme jej v Kapitole 13., ale v trochu modernější podobě. Jako pokračování důkazu Hermite podal následující racionální aproximace pro e a e^2 :

$$e \approx \frac{58.291}{21.444}, \quad e^2 \approx \frac{158.452}{21.444}.$$

Výše uvedená aproximace má desetinnou hodnotu 2.718289498, chyba je menší než 0.0003 procenta oproti přesné hodnotě.

Když Hermite proslavil číslo e , dalo by se očekávat, že bude věnovat veškeré své úsilí, aby udělal to stejné pro π . Ale on v dopise někdejšímu studentovi napsal: „Nebudu nic riskovat na pokus dokázat transcendenci π . Když někdo jiný vezme na sebe tento podnik, nikdo se nebude těšit jeho úspěchu tak jako já. Ale věřte mi, nestojí to za to úsilí.” Samozřejmě očekával, že je to velmi těžký úkol. Ale v roce 1882, jen devět let po Hermitově důkazu transcendence e , se úspěšně odměnilo úsilí německého matematika Carla Louisa Ferdinanda Lindemanna (1852 – 1939). Lindemann vytvořil svůj důkaz pomocí Hermitova; využil toho, že výraz tvaru

$$A_1 e^{a_1} + A_2 e^{a_2} + \dots + A_n e^{a_n},$$

kde a_i jsou různá algebraická čísla (reálná nebo komplexní) a A_i jsou algebraická čísla, nikdy nemůže být roven 0 (vyloučili jsme triviální případ, kdy A_i jsou všechna rovna 0). Ale my známe jedno takové vyjádření, které je rovno 0: Eulerova formule $e^{\pi i} + 1 = 0$ (všimněme si, že levou stranu můžeme zapsat jako $e^{\pi i} + e^0$, což má požadovaný tvar). Proto πi , a odtud i π nemůže být algebraické: π je transcendentní.

Příběhy π a e mají hodně společného, v jednom smyslu se však liší. Protože π má delší historii a větší slávu, spočítat je na více desetinných

míst se stalo již dávno čímsi jako závodem. Ani Lindemannův důkaz, že je π transcendentní, nezastavil lovce desetinných míst v provádění dalších nápadných hrdinských činů (v roce 1989 bylo zaznamenáno 480 miliónů desetinných míst). Vzhledem k e nebyla pocíťována taková vášeň a nebylo vygenerováno na tolik míst jako π .

Když se díváme na povahu dvou nejznámějších čísel v matematice, vypadá to, že pozornost matematiků by měla směřovat do dvou odlišných oblastí. Ale na Druhém mezinárodním kongresu matematiků, který se konal v Paříži v roce 1900, jeden z významných matematiků té doby, David Hilbert (1862 – 1943), vystoupil před matematickou společností se seznamem dvaceti tří nevyřešených problémů, jejichž vyřešení považoval za nejdůležitější. Sedmý problém Hilbertova seznamu bylo dokázat nebo vyvrátit hypotézu, že pro jakékoliv algebraické číslo $a \neq 0, 1$ a jakékoliv algebraické iracionální číslo b , je hodnota a^b vždy transcendentní; jako příklad podal čísla $2^{\sqrt{2}}$ a e^{π} (to druhé kvůli tomu, že se dá napsat jako i^{-2i} a má tedy požadovaný tvar). Hilbert předpovídal, že řešení tohoto problému zabere více času než Velká Fermatova věta, ale byl příliš pesimistický. V roce 1929 ruský matematik Alexandr Osipovich Gelfond (1906 – 1968) dokázal transcendence e^{π} , doprovázenou o rok později důkazem pro $2^{\sqrt{2}}$. Hilbertova obecná hypotéza týkající se a^b byla dokázána v roce 1934 nezávisle Gelfondem a T.Schneiderem z Německa.

Není jednoduché dokázat, že speciálně dané číslo je transcendentní: musí se dokázat, že toto číslo splňuje určitý požadavek. Mezi čísla, u nichž se to ještě nepovedlo, patří π^e , π^{π} , a e^e . Příklad π^e je obzvláště zajímavý, připomíná totiž nepodařenou symetrii, která existuje mezi π a e .

V následujících kapitolách se budeme opět věnovat našemu tématu, jímž je číslo e , dokážeme jeho iracionalitu a pak i transdendenci.

Kapitola 12.

Číslo e je iracionální

Číslo e už od doby svého *vzniku* stále budilo zájem matematiků. Jeho vlastnosti se zkoumaly z různých hledisek. My se nyní na číslo e budeme dívat jako na číslo reálné, a budeme jeho vlastnosti zkoumat právě z tohoto hlediska. Do popředí se tedy dostává otázka, zda jde o číslo racionální nebo iracionální. Ale my už přece odpověď známe – je to číslo iracionální; nyní zbývá tuto odpověď potvrdit. Nebude to nic složitého, v podstatě nám budou stačit pouze elementární úvahy. Vyslovme tedy toto tvrzení:

12.1. Věta. Číslo e je iracionální.

Důkaz. Nejprve si musíme říct, že na ověření iracionality e není vhodné jeho vyjádření ve tvaru limity $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$, ale bude lépe vyhovovat jeho druhá forma, a to rozvoj (faktoriálový) do nekonečné řady

$$(12.1) \quad e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Budeme postupovat nepřímou: předpokládáme, že e je *racionální*, a pak ukážeme, že tento předpoklad vede ke sporu. Racionální číslo má tu vlastnost, že se dá napsat jako podíl dvou celých čísel. Nechť tedy $e = p/q$, kde p a q jsou celá čísla. Již víme, že $2 < e < 3$, proto e nemůže být celé číslo; tudíž jmenovatel q musí být přinejmenším roven 2. Nyní vynásobíme obě strany rovnice (12.1) číslem $q! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot q$. Na levé straně tak dostaneme

$$e \cdot q! = \left(\frac{p}{q}\right) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot q = p \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (q-1),$$

zatímco na pravé straně bude

$$\begin{aligned} [q! + q! + 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot q + 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot q + \cdots + (q-1) \cdot q + q + 1] \\ + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots \end{aligned}$$

(poznamenejme, že 1 v závorkách pochází z členu $1/q!$ v řadě pro e). Levá strana je samozřejmě celé číslo, protože je to součin celých čísel. Na pravé straně je výraz v závorkách rovněž celé číslo. Ale zbývající členy nejsou celá čísla, protože jejich jmenovatel je přinejmenším roven 3 ($q \geq 2$). Nyní ukážeme, že ani jejich součet není celé číslo. Zřejmě (píšu zřejmě, protože s podobným odhadem jsme se již setkali):

$$\begin{aligned} \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots + \frac{1}{(q+1) \dots (q+k)} + \cdots < \\ < \frac{1}{q+1} \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(q+1)^k} + \cdots = \\ = \frac{1}{q+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

V posledním řádku jsme použili tvrzení o součtu nekonečné geometrické řady, $a + ar + ar^2 + \dots = a/(1-r)$, pro $|r| < 1$. Číslo $\frac{1}{q}$ leží určitě v intervalu $(0, 1)$, protože vždy $q \geq 2$. O jeho velikosti můžeme říci jen velmi málo. Z následující úvahy můžeme pouze usoudit, že $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$. Dosadíme za $q = 2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots &\leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots < \\ &< \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Máme tedy na levé straně celé číslo a na pravé číslo necelé, což je samozřejmě spor. Proto e nemůže být podílem dvou celých čísel – je tedy iracionální.

Kapitola 13.

Důkaz transcendence čísla e

Měli bychom dokázat, že rovnice pro e

$$(13.1) \quad a_0 + a_1e + a_2e^2 + \cdots + a_ne^n = 0,$$

kde koeficienty $a_0, \dots, a_n$ jsou celá čísla a $a_0 \neq 0$, vede ke sporu; tento spor vyplývá z jednoduchých vlastností celých čísel. Z teorie čísel se budeme odvolávat pouze na elementární poučky o dělitelnosti, zvláště pak na to, že každé dané celé číslo je možno rozložit na prvočíselné činitele pouze jedním způsobem, a na to, že existuje nekonečné množství prvočísel.

Schéma důkazu spočívá v následujícím: ukážeme, jak je možno najít velmi dobré racionální přiblížení hodnoty pro číslo e a jeho mocniny, mající následující tvar:

$$(13.2) \quad e = \frac{M_1 + \varepsilon_1}{M}, \quad e^2 = \frac{M_2 + \varepsilon_2}{M}, \quad \dots, \quad e^n = \frac{M_n + \varepsilon_n}{M},$$

kde $M, M_1, M_2, \dots, M_n$ jsou celá čísla, a $\frac{\varepsilon_1}{M}, \frac{\varepsilon_2}{M}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{M}$ jsou mimořádně malé zlomky. Když dosadíme (13.2) do rovnice (13.1) a pak tuto rovnici vynásobíme číslem M , dostaneme:

$$(13.3) \quad (a_0M + a_1M_1 + a_2M_2 + \cdots + a_nM_n) + (a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n) = 0.$$

První sčítanec v levé části je celé číslo, a my dokážeme, že není rovno nule; z druhého sčítance se nám podaří, pokud zvolíme dostatečně malé hodnoty čísel $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, udělat pravidelný zlomek. Takovým způsobem dojdeme ke sporu spočívajícím v tom, že součet celého čísla různého od nuly $a_0M + a_1M_1 + a_2M_2 + \cdots + a_nM_n$ a pravidelného zlomku různého od jedničky $a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$ je roven nule; odtud bude vyplývat i nemožnost existence rovnice (13.1).

Při důkazu nám velkou službu poskytne následující poučka: celé číslo, které není dělitelné určitým číslem, je jistě odlišné od nuly (protože nula je dělitelná jakýmkoliv číslem); jmenovitě ukážeme, že čísla $M_1, \dots, M_n$ jsou dělitelná některým prvočíslem p , a číslo a_0M tímto prvočíslem dělitelné není; a proto suma $a_0M + a_1M_1 + a_2M_2 + \cdots + a_nM_n$ není dělitelná tímto číslem p , a tudíž je odlišná od nuly.

Hlavním prostředkem k realizaci důkazu, jehož idea byla zde naznačena, se jeví jeden určitý integrál; jako první jej ve svých úvahách používal Hermite, a proto jej můžeme nazvat Hermitův integrál. Sestavit jej znamenalo najít klíč k celému důkazu. Uvidíme, že hodnota tohoto integrálu je celé číslo, a toto číslo nám určí potřebné M :

$$(13.4) \quad M = \int_0^\infty \frac{z^{p-1} \{(z-1)(z-2)\cdots(z-n)\}^p e^{-z}}{(p-1)!} dz;$$

kde n znamená stupeň předpokládané rovnice (13.1), a p je prvočíslo, které určíme později. Pomocí tohoto integrálu také najdeme výše vzpomenuté

přibližné hodnoty (13.2) pro mocniny e^ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$); pro tento účel rozdělíme interval $0 < z < \infty$ na dva intervaly pomocí čísla ν a položíme

(13.5)

$$M_\nu = e^\nu \int_\nu^\infty \frac{z^{p-1} \{(z-1)(z-2)\dots(z-n)\}^p e^{-z}}{(p-1)!} dz,$$

(13.6)
$$\varepsilon_\nu = e^\nu \int_0^\nu \frac{z^{p-1} \{(z-1)(z-2)\dots(z-n)\}^p e^{-z}}{(p-1)!} dz.$$

Nyní přejdeme k samotnému důkazu.

1. Výchozím bodem bude formule, se kterou se často setkáváme v elementární teorii funkce Γ :

$$\int_0^\infty z^{\rho-1} e^{-z} dz = \Gamma(\rho).$$

My budeme předpokládat, že ρ je celé číslo; v tomto případě bude $\Gamma(\rho) = (\rho-1)!$, což nyní dokážeme. Pomocí integrace per partes (po částech) najdeme

$$\begin{aligned} \int_0^\infty z^{\rho-1} e^{-z} dz &= [-z^{\rho-1} e^{-z}]_0^\infty + \int_0^\infty (\rho-1) z^{\rho-2} e^{-z} dz = \\ &= (\rho-1) \int_0^\infty z^{\rho-2} e^{-z} dz. \end{aligned}$$

(Hodnota výrazu $[-z^{\rho-1} e^{-z}]_0^\infty = 0$, protože limity $\lim_{z \rightarrow \infty}$ a $\lim_{z \rightarrow 0}$ jsou obě rovny nule.) Dostali jsme tak násobek integrálu, který má stejný tvar jako výchozí integrál, pouze je v něm exponent u z o jedničku menší. Když provedeme tuto úpravu několikrát, dojdeme při ρ celém k z^0 , a protože $\int_0^\infty e^{-z} dz = [-e^{-z}]_0^\infty = 1$, dostaneme konečně

(13.7)
$$\int_0^\infty z^{\rho-1} e^{-z} dz = (\rho-1)(\rho-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = (\rho-1)!.$$

Při celém ρ je tento také roven celému číslu, a hodnota integrálu roste velmi rychle s rostoucím ρ .

Abychom tento výsledek mohli geometricky znázornit, zobrazíme graficky nejdříve průběh funkce $z^{\rho-1} e^{-z}$ pro různé hodnoty ρ (obr. 13); hodnota integrálu bude rovna ploše obrazce uzavřeného mezi křivkou a osou z a protínajícího se do nekonečna. Čím větší je ρ , tím více se křivka přimyká k ose v blízkosti bodu $z = 0$, ale za to tím více roste počínaje bodem $z = 1$; přitom dosahuje, podle toho, jaké je ρ , maxima v $z = \rho - 1$. Toho maximum se s rostoucím ρ zvětšuje a posouvá se vpravo; počínaje tímto bodem, získává převládající hodnotu člen e^{-z} , křivka začíná padat, a nakonec se opět velmi přiblíží k ose. Nyní je pochopitelné, proč plocha náš integrál – je vždy konečná, ale s rostoucím ρ silně vzrůstá.

Obr. 13

2. Použijeme-li dokázanou formuli, lehce najdeme hodnotu Hermitova integrálu (13.4). Pokud v čitateli odstraníme závorky a rozmístíme integrační funkci podle zmenšujících se mocnin z :

$$\{(z-1)(z-2)\dots(z-n)\}^p = \{z^n - \dots + (-1)^n n!\}^p = z^{np} - \dots + (-1)^n (n!)^p$$

(vypisují tady pouze členy s nejvyšší a nejnižší, t.j. nulovou, mocninou z), pak tento integrál získá tvar

$$M = \frac{(-1)^n (n!)^p}{(p-1)!} \int_0^\infty z^{p-1} e^{-z} dz + \sum_{\rho=p+1}^{p+np} \frac{C_\rho}{(p-1)!} \int_0^\infty z^{\rho-1} e^{-z} dz;$$

zde C_ρ značí celá čísla, která obdržíme při výše uvedeném odstranění závorek v mnohočlenu. Aplikujeme-li poučku (13.7) na každý ze získaných integrálů, dostaneme

$$M = (-1)^n (n!)^p + \sum_{\rho=p+1}^{p+np} C_\rho \frac{(\rho-1)!}{(p-1)!}.$$

Všechny hodnoty sumačního indexu ρ jsou větší než p , a to znamená, že vztahy $\frac{(\rho-1)!}{(p-1)!}$ - celá čísla, kromě toho obsahující p ; když jej vytkneme před závorku, obdržíme:

$$M = (-1)^n (n!)^p + p\{C_{p+1} + C_{p+2}(p+1) + C_{p+3}(p+1)(p+2) + \dots\}.$$

Odtud vidíme, že M je nebo není dělitelné p v závislosti na tom, je-li dělitelný p první sčítanec $(-1)^n (n!)^p$. Tedy pokud p je prvočíslo, tak zřejmě tento sčítanec nebude dělitelný p , jestli p nebude v soustavě činitelů $1, 2, \dots, n$, a to bude v případě, když $p > n$. Této podmínce vyhovuje nekonečné množství prvočísel; vybereme jedno tak, aby výraz $(-1)^n (n!)^p$ (to znamená i M) nebyl dělitelný p .

Stejně tak při předpokladu $a_0 \neq 0$ lehce splníme i to, aby a_0 nebylo dělitelné p ; stačí vybrat p větší než a_0 , což jak bylo uvedeno výše, je možné. Tehdy součin $a_0 M$ také nebude dělitelný p , a tak dosáhneme svého prvního dílčího cíle.

3. Prozkoumáme nyní čísla $M_\nu (\nu = 1, 2, \dots, n)$, určená rovnicemi (13.5). Vložíme e^ν pod znak integrálu a zavedeme novou proměnnou $\zeta = z - \nu$, nabývající hodnoty od 0 do ∞ , když z se mění od ν do ∞ , Dostaneme

$$M_\nu = \int_0^\infty \frac{(\zeta + \nu)^{p-1} \{(\zeta + \nu - 1)(\zeta + \nu - 2) \dots \zeta \dots (\zeta + \nu - n)\}^p e^{-\zeta}}{(p-1)!} d\zeta.$$

Tento integrál má stejný tvar, jako zkoumaný dříve integrál M , a my tedy můžeme použít analogické úpravy. Odstraněním závorek v čitateli integrační funkce, dostaneme součet mocnin proměnné ζ s celými koeficienty, přičemž

nejnižší z těchto mocnin je ζ^p . Integrál výrazu, stojícího v čitateli, se nyní objeví jako součet integrálů

$$\int_0^\infty \zeta^p e^{-\zeta} d\zeta, \int_0^\infty \zeta^{p+1} e^{-\zeta} d\zeta, \dots, \int_0^\infty \zeta^{(n+1)p-1} e^{-\zeta} d\zeta$$

s celými koeficienty. Stejně tak tyto poslední integrály mají, v souhlasu s rovnostmi (13.7), odpovídající hodnoty $p!, (p+1)!, \dots$. Tak si tento součet můžeme představit ve tvaru čísla $p!$ vynásobeného nějakým celým číslem A_ν ; takto pro každý ze zkoumaných integrálů máme:

$$M_\nu = \frac{p! A_\nu}{(p-1)!} = p \cdot A_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots, n),$$

t.j. všechna M_ν jsou celá čísla dělitelná p .

Pokud to srovnáme s již dokázaným v druhém bodě, vidíme, že můžeme použít poučku uvedenou na začátku kapitoly a říci: celé číslo $a_0 M + a_1 M_1 + \dots + a_n M_n$ zřejmě není dělitelné p , a tudíž je různé od nuly.

4. Druhá část důkazu se týká součtu $a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_n \varepsilon_n$, kde, v souhlasu s rovnostmi (13.6),

$$\varepsilon_\nu = \int_0^\nu \frac{z^{p-1} \{(z-1)(z-2)\dots(z-n)\}^p e^{-z+\nu}}{(p-1)!} dz,$$

a nám zbývá dokázat, že můžeme ε_ν udělat jakkoliv malé; přitom využijeme jednak toho, že p může být jakkoliv velké, a stejně tak podmínky, které jsme doteď kladli na prvočíslo p , tj. ($p > n$, $p > a_0$).

Zobrazíme především geometrický průběh změny integrační funkce (obr. 14). Při $z = 0$ se křivka dotýká osy z , při $z = 1, 2, \dots, n$ se dotýká osy z a zároveň ji protíná. Nyní uvidíme, že pokud vezmeme p dostatečně velké, nebude se vlivem jmenovatele $(p-1)!$ křivka na celém intervalu $(0, n)$ zvedat vysoko nad osu z , pokud vezmeme p dostatečně velké; z toho jasně vidíme, že integrál ε_ν bude velmi malý. Všimněme si, že vně tohoto intervalu (při $z > n$) integrační funkce prudce vzrůstá a pak se asymptoticky blíží k ose z , tak jako zkoumaná výše funkce $z^{\rho-1} e^{-z}$ [pro $\rho = (n+1)p$]; to objasňuje, jak se s rostoucím p získávají ty prudce rostoucí hodnoty integrálu M , vzatého na celém intervalu od 0 do ∞ .

Obr. 14

Pro to, abychom skutečně ocenili velikost integrálů ε_ν , bude zřejmě stačit, když použijeme následující hrubý odhad. Označíme jako G a g_ν největší hodnoty modulu (absolutní hodnoty) funkce $z(z-1)\dots(z-n)$ a funkce $(z-1)(z-2)\dots(z-n)e^{-z+\nu}$ na intervalu $(0, n)$, tak že

$$\left. \begin{aligned} |z(z-1)\dots(z-n)| &\leq G, \\ |(z-1)(z-2)\dots(z-n)e^{-z+\nu}| &\leq g_\nu \end{aligned} \right\} \text{ při } 0 \leq z \leq n.$$

Stejně tak jako absolutní hodnota integrálu nepřevyšuje integrál absolutní hodnoty integrační funkce, máme pro každé ν

$$(13.8) \quad |\varepsilon_\nu| \leq \int_0^\nu \frac{G^{p-1}g_\nu}{(p-1)!} dz = \frac{G^{p-1}g_\nu\nu}{(p-1)!}.$$

Čísla G , g_ν , ν nezávisí na p a nacházející se ve jmenovateli faktoriál $(p-1)!$ roste, jak je známo, rychleji než mocnina G^{p-1} , nebo přesněji při dostatečně velkém p zlomek $\frac{G^{p-1}}{(p-1)!}$ je menší než jakékoliv předem zvolené číslo, ať je jakkoliv malé. Rovnice (13.8) takto ukazuje, že když vezmeme p dostatečně velké, můžeme udělat jakkoliv malým číslo ε_ν .

Odtud bezprostředně plyne, že můžeme udělat jakkoliv malou i sumu $a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n$, sestávající z n členů; skutečně

$$(13.9) \quad |a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n| \leq |a_1| \cdot |\varepsilon_1| + |a_2| \cdot |\varepsilon_2| + \dots + |a_n| \cdot |\varepsilon_n|;$$

v souhlasu s rovnicí (13.8) tento výraz nepřevyšuje

$$(|a_1| \cdot 1g_1 + |a_2| \cdot 2g_2 + \dots + |a_n| \cdot ng_n) \cdot \frac{G^{p-1}}{(p-1)!};$$

a protože činitel uzavřený v závorkách má stálou nezávislou na p hodnotu, tak díky činiteli $\frac{G^{p-1}}{(p-1)!}$ můžeme celou pravou část nerovnosti (13.9), a tudíž i levou, t.j. $|a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n|$, udělat jakkoliv malou – zvláště pak menší než 1.

Ale to nás přivádí ke sporu s rovnicí (13.3):

$$(a_0M + a_1M_1 + \dots + a_nM_n) + (a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n) = 0,$$

kterou jsme výše brali v úvahu; spor se zakládá na tom, že celé číslo různé od nuly po přičtení k nějakému pravidelnému zlomku by se mělo rovnat nule. To samozřejmě nemůže nastat. Tedy pro číslo e neexistuje rovnice s celočíselnými koeficienty

$$a_0 + a_1e + a_2e^2 + \dots + a_ne^n = 0,$$

tedy číslo e je transcendentní.

Kapitola 14.

Neočekávaný výskyt čísla e

Sama ze své vlastní zkušenosti vím, že ze tří nejvýznamnějších iracionálních čísel, jimiž jsou π , zlatý poměr, a e , je pro studenty nejhůře pochopitelné a tím i nejméně oblíbené to třetí v pořadí – číslo e . S číslem π se všichni setkávají již jako žáci základní školy, a to v souvislosti s obsahem kruhu a obvodem kružnice. O zlatém řezu jistě také všichni slyšeli, ale raději jej krátce připomeneme. Najít zlatý řez, znamená rozdělit úsečku nějakým bodem tak, aby byla větší část úsečky vzhledem k menší části ve stejném poměru, jako je celá úsečka vzhledem k větší části. Vezměme úsečku délky 1. Rozdělíme ji na dvě části, které označíme x a $1 - x$. Abychom dostali zlatý řez, musí platit:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}.$$

Po jednoduché úpravě dostaneme kvadratickou rovnici, jejímž řešením je

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

(druhý kořen je záporný), přibližná hodnota $x \doteq 0.618$. S číslem e , pojmenovaném po Leonhardu Eulerovi, se studenti poprvé setkávají během kursu diferenciálního počtu, buď přes rovnost

$$\int_1^e \frac{dt}{t} = 1,$$

zavedenou v souvislosti s přirozenými logaritmy, anebo přes vztah

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Nicméně ani jedna z těchto definic e neposkytuje bezprostřední proniknutí k tomuto důležitému číslu. Výsledkem je, že málokterý ze studentů si pamatuje víc než jen frázi: „Je to základ přirozeného logaritmu.“ Je to škoda, protože existuje mnoho nenásilných způsobů, jak se s tímto číslem lépe seznámit. O některých jsme se již zmínili, jmenovitě jak dospět k číslu e přes finanční záležitosti, a jak to udělat geometricky – přes kvadraturu hyperboly. Uvedeme nyní ještě několik příkladů, které by měly ukázat, kde se ještě číslo e dá najít.

14.1. Příklad. Máme dva hráče. Každý z nich má rozmíchaný balíček hracích karet (po 52 kartách). Oba vyloží svoji první kartu. Když tyto karty nejsou stejné (např.: dvě křížové čtyřky považujeme za stejné), hráči pokračují vykládáním druhé karty, hra končí, když hráči vyloží dvě stejné karty. Jaká je pravděpodobnost, že projdou celý balíček, aniž by narazili na stejnou dvojici? Odpověď dává součet

$$1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{52!},$$

což je počáteční část řady pro $1/e$; ta je založena na Maclaurinově řadě

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots).$$

V literatuře se můžete setkat s jinou variantou této úlohy, a to pod názvem: „Problém šatnářky”. Problém zní: Ctihodní pánové v počtu n přijdou na shromáždění, všichni v kloboucích, a odloží si své klobouky do šatny. Při odchodu šatnářka, možná ten den velmi roztržitá, možná dokonce z mizerného osvětlení osleplá, vydá každému z pánů náhodně jeden z klobouků. Jaká je pravděpodobnost, že žádný pán nedostane od šatnářky zpět svůj klobouk?

14.2. Příklad. Vybíráme náhodně čísla z intervalu $(0, 1)$. Jaký je očekávaný počet vybraných čísel, než jejich součet poprvé dosáhne 1? Odpovědí je e . Elementární důkaz najdete v [Sh].

14.3. Příklad. Tzv. „Problém sekretářky” se týká zaměstnavatele, který se chystá k rozhovoru s n žadateli na pozici sekretáře. Na konci každého rozhovoru musí rozhodnout, zda žadatele chce či nechce přijmout. Zaměstnavatel musí projít všemi rozhovory, žádná osoba nemůže být přijata později. Když se dostane na posledního žadatele, ten už určitě místo dostane. Cílem je maximalizovat pravděpodobnost, že přijatá osoba je ta nejlépe kvalifikovaná. Jeho strategie je najít číslo $k < n$ takové, že po rozhovoru s prvními k žadateli přijme ihned toho, který je lépe kvalifikovaný než těch k prvních. Řešení tohoto problému je dosti složité, uvádím proto pouze výsledek (kompletní řešení můžete nalézt v [Gi]). Pravděpodobnost přijetí nejlépe kvalifikované osoby je tím větší, čím se $\frac{k}{n}$ více blíží $\frac{1}{e}$. Navíc číslo $\frac{1}{e}$ je ve skutečnosti přibližnou hodnotou maximální pravděpodobnosti. Například když je $n = 30$ žadatelů, zaměstnavatel musí vést interview s 11 žadateli (což je přibližně $\frac{30}{e}$) a pak vybrat prvního lépe kvalifikovaného než prvních jedenáct. Pravděpodobnost získání nejlépe kvalifikovaného je $\frac{1}{e}$.

14.4. Příklad. Jistá restaurace s každým nákupem vrací zpět náhodně minci s obrázkem hlavního města jednoho ze států USA. Cílem je shromáždit úplnou kolekci, tj. 50 mincí. Ptáme se, jak velkou část kolekce budeme nejpravděpodobněji vlastnit po 50 nákupech. Odpovědí je, že po 50 nákupech budeme mít $1 - (1 - \frac{1}{50})^{50}$ z celé kolekce, což je přibližně $1 - \frac{1}{e}$ (viz [Si]).

14.5. Příklad. Posloupnost čísel $x_1, x_2, x_3, \dots$ se náhodně generuje z intervalu $[0, 1]$. Proces trvá tak dlouho, dokud je posloupnost čísel monotónně rostoucí nebo monotónně klesající. Jaká je očekávaná délka monotónní posloupnosti? Například pro posloupnost začínající 0.91, 0.7896, 0.20132, 0.41 je délka monotónní posloupnosti tři. Pro posloupnost začínající 0.134, 0.15, 0.3546, 0.75, 0.895, 0.276 je délka monotónní posloupnosti pět.

Pravděpodobnost, že délka L monotónní posloupnosti je větší než k , je dána

$$P(L > k) = P(x_1 < x_2 < \dots < x_{k+1}) + P(x_1 > x_2 > \dots > x_{k+1}) =$$

$$= \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+1)!} = \frac{2}{(k+1)!}.$$

Když označíme $P(L = k)$ jako p_k , očekávaná délka monotónní posloupnosti je

$$E(L) = 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + \dots$$

Přepíšeme to ve tvaru

$$\begin{aligned} E(L) = & p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + \dots \\ & + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + \dots \\ & + \quad p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + \dots \\ & + \quad \quad p_4 + p_5 + p_6 + \dots \\ & + \quad \quad \quad p_5 + p_6 + \dots \end{aligned}$$

Sečtením každého řádku této trojúhelníkové řady obdržíme

$$\begin{aligned} E(L) &= 1 + 1 + P(L > 2) + P(L > 3) + P(L > 4) + \dots \\ &= 1 + 1 + 2 \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \dots \right) \\ &= 1 + 1 + 2 \left(e - \frac{5}{2} \right) \\ &= 2e - 3 \approx 2.4366. \end{aligned}$$

14.6. Příklad. Drobná úprava předchozího příkladu dává uspokojivější odpověď. Předem požadujeme posloupnost monotónně rostoucí, a za druhé při počítání délky posloupnosti zahrneme první číslo, které obrací rostoucí směr posloupnosti. Proto posloupnost začínající 0.154, 0.3245, 0.58, 0.432 má přiděleno skóre čtyři a posloupnosti začínající 0.6754, 0.239 přidělíme skóre dva. Stejným postupem jako v předchozím příkladu lze ukázat, že očekávaná hodnota je všudypřítomné a fascinující číslo e .

Kapitola 15.

Některá zvláštní čísla vztahující se k e

Pro zajímavost uvádím ještě několik čísel, které s e souvisejí a které našly v matematice uplatnění.

$$e^{-e} = 0.065988036 \dots$$

Leonhard Euler ukázal, že výraz $x^{x^{x^{\dots}}}$, když počet exponentů roste do nekonečna, má limitu právě tehdy, když x se nachází mezi $e^{-e} (= 1/e^e)$ a 1.

$$e^{-\pi/2} = 0.207879576 \dots$$

V roce 1746 dále Euler ukázal, že výraz i^i (kde $i = \sqrt{-1}$) má nekonečně mnoho hodnot a všechny jsou reálné: $i^i = e^{-(\pi/2+2k\pi)}$, kde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Základní hodnotou (pro $k = 0$) je $e^{-\pi/2}$.

$$1/e = 0.367879441 \dots$$

Limita $(1 - 1/n)^n$ pro $n \rightarrow \infty$. S tímto číslem jsme se setkali v předchozí kapitole v příkladu s kartami (nebo Problém šatnářky). V literatuře se můžete setkat s ještě jednou variantou tohoto úkolu, jmenovitě v problému „zamíchaných obálek“, který představil Nicolaus Bernoulli: Když vložíme n dopisů do n adresovaných obálek, jaká je pravděpodobnost, že každý dopis byl umístěn ve špatné obálce? Když $n \rightarrow \infty$, pravděpodobnost se blíží k $1/e$.

$$e^{1/e} = 1.444667861 \dots$$

Řešení problému od Jakoba Steinera: Najít, jakou maximální hodnotu může nabývat funkce $y = x^{1/x} = \sqrt[x]{x}$. Tuto maximální hodnotu nabývá funkce právě pro $x = e$.

$$878/323 = 2.718266254 \dots$$

Nejlepší racionální aproximace čísla e při použití čísel menších než 1000. Toto číslo je lehce zapamatovatelné a připomíná racionální aproximaci pro π : $355/113 = 3.14152992 \dots$

$$e = 2.718281828 \dots$$

Základ přirozeného logaritmu a limita $(1 + 1/n)^n$ pro $n \rightarrow \infty$. Opakující se blok číslic 1828 svádí na nesprávnou cestu, e je iracionální číslo a je reprezentováno nekonečným a neopakujícím se desetinným rozvojem. Iracionalitu čísla e dokázal v roce 1737 Euler. Charles Hermite v roce 1873 dokázal, že e je transcendentní; t.j. není řešením žádné polynomické rovnice s celočíselnými koeficienty.

Číslo e může být interpretováno také geometricky, a to několika cestami. My jsme se s ním setkali v souvislosti s plochou pod hyperbolou. Dále je obsah plochy pod grafem $y = e^x$ v mezích od $x = -\infty$ do $x = 1$ také roven e , stejně jako je sklon tohoto grafu v bodě $x = 1$.

$$e + \pi = 5.859874482 \dots$$

$$e \cdot \pi = 8.539734223 \dots$$

Tato čísla se v aplikacích vyskytují velice zřídka; není známo, zda to jsou čísla algebraická nebo transcendentní, stejně tak jako u následujících dvou čísel:

$$e^e = 15.15426224 \dots$$

$$\pi^e = 22.45915772 \dots$$

$$e^\pi = 23.14069263 \dots$$

Alexandr Gelfond v roce 1934 dokázal, že toto číslo je transcendentní.

$$e^{e^e} = 3814279.104 \dots$$

Srovnejte, o kolik je toto číslo větší než e^e . Následující číslo v tomto postupu, $e^{e^{e^e}}$, má 1656521 číslic v celočíselné části.

Kapitola 16.

Nezbytná trocha historie

Naše povídání o teď již velmi dobře známém číslu e bychom měli zakončit několika poznámkami z historie. Vzpomeneme několik nejdůležitějších osobností, které se zasloužily o rozvoj té části matematiky, o které byla řeč v celé této práci.

Začneme zhruba v 16. století. V té době měli lidé zkušenosti jak s tabulkami, tak i s geometrickou posloupností. V jednom spisku se v souvislosti s ní objevila základní idea *logaritmických tabulek*.

MICHAEL STIFEL (1486 – 1567)

– německý matematik, v roce 1544 vydal v Norimberku svoji knihu *Arithmetica integra*, ve které si všiml, že při práci s aritmetickou a geometrickou posloupností

0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
1	2	4	8	16	32	64	128	256	...

násobení členů ve druhém řádku (např. $8 \times 32 = 256$) odpovídá sčítání exponentů v prvním řádku ($3 + 5 = 8$). Možný postup při zjednodušení násobení je zřejmý. Uvedená množina čísel, které bychom mohli násobit, je sice poněkud řídká, ale princip dvojice aritmetické a geometrické posloupnosti je z příkladu dobře patrný. V uvedeném Stifelově díle se poprvé setkáváme i s počítáním s mocninami s libovolnými racionálními koeficienty, přičemž se zvláště podtrhuje pravidlo násobení. Stifel poskytuje dokonce i patrně první stávající tabulku logaritmů, ale zajisté velmi primitivní: obsahuje pouze všechna celá čísla od -3 do 6 jako exponenty a zároveň s nimi patřičné mocniny čísla 2 , t.j. $\frac{1}{8}, \dots, 64$. Viditelně měl Stifel představu o významu hlubšího rozvoje těchto idejí, ovšem neměl matematický aparát, který by mu to umožnil.

JOHN NAPIER (1550 – 1617)

– skotský šlechtic, jenž stál u zrodu prvních logaritmických tabulek. Jeho první tabulky obsahovaly 100 členů geometrické posloupnosti s prvním členem 10^7 a kvocientem $(1 - 10^{-7})$. Napierovy logaritmické tabulky vyvolaly ohromné nadšení, svědčí o tom mezi jinými fakt, že na začátku tabulek se objevily zábavné verše, ve kterých rozliční autoři opěvují skvělé vlastnosti logaritmů. Nicméně sám Napierův způsob vyčíslení logaritmů byl publikován až po jeho smrti, v roce 1620.

John Napier byl všestranně nadaným člověkem, proto asi nebude na škodu říci si několik zajímavostí z jeho života. Narodil se v roce 1550 (přesné datum narození není známo) v jeho rodinném panství, Merchiston Castle, blízko Edinburghu, Skotsko. Detaily z jeho dětství jsou jen náčrtkovité. Ve svých třinácti letech byl vyslán na Universitu St. Andrews, kde studoval náboženství. Po dočasném pobytu v zahraničí se v roce 1571 vrátil na svou

rodnou půdu a oženil se s Elizabethou Stirlingovou, se kterou měl dvě děti. Po smrti své manželky v roce 1579 se oženil s Agnes Chisholmovou, a měli dalších deset dětí. Druhý syn z tohoto manželství, Robert, byl později otcovým literárním vydavatelem. Po smrti svého otce sira Archibalda v roce 1608 se John vrátil do Merchistonu, kde jako osmý správce panství strávil zbytek svého života.

Napierovy časné snahy těžce narážely na budoucí matematickou tvořivost. Jeho hlavní zájmy se týkaly náboženství, nebo raději náboženské činnosti. Jako horlivý protestant a věrný odpůrce papežství publikoval své názory v *A Plaine Discovery of the whole Revelation of Saint John* (1593), kniha, ve které ostře napadá katolický kostel a tvrdí, že papež je antikrist, a pobízí skotského krále Jamese VI (později král Anglie James I), aby očistil svůj dům a svůj dvůr od všech katolíků a ateistů. Také předpovídal, že „soudný den“ spadne mezi 1688 a 1700. Kniha byla přeložena do několika jazyků a vyšla v 21 vydáních (deset z nich se objevilo již za jeho života), což Napiera ujistilo, že jeho jméno se bezpečně zapíše do historie.

Nicméně Napierovy zájmy se neomezovaly na náboženství. Jako velkostatkář měl zájem na zlepšení svých výnosů ze sklizně a z dobytka, experimentoval s různými hnojivy a solemi, aby zúrodnil půdu. V roce 1579 vynalezl hydraulický šroub na kontrolování hladiny vody v uhelných šachtách. Také prokázal odvážný zájem ve vojenských záležitostech, nebál se, že bude přistižen se strachem, že král Filip II se chystá vtrhnout do Anglie. Vymýšlel plány na postavení ohromných zrcadel, která by mohla zapálit nepřítelovy lodě, připomínající Archimédovy plány na obranu Syrakus osmnáct set let tomu. Vymyslel dělo, které dokáže *vyčistit plochu čtyř milí od všech obydlí*, válečný vůz s *pohybujeícími se ústy odvahy*, který by *roztrousil zkázu na všechny strany*, a dokonce zařízení *plovoucí pod vodou s různými léčkami ubližujícími nepříteli* – vše předchůdci moderní vojenské technologie. Není známo, zda byl tehdy některý z těchto strojů postaven.

Jak už to bývá s lidmi tak rozmanitých zájmů, Napier se stal předmětem mnoha vyprávění. Zdá se, že byl hašteřivé povahy, zvláště pokud jde o spory se sousedy nebo nájemníky. Podle jednoho vyprávění Napier byl popuzen jedním sousedovým holubem, který se snesl na jeho pozemek a snědl jeho zrní. Soused varován Napierem, že když nezastaví holuba, bude zle, pohrdavě ignoroval radu s tím, že Napier může chytit holuba, kdy se mu zachce. Další den našel soused svého holuba polomrtvého, jak leží na Napierově trávníku. Napier jednoduše namočil zrní v silném alkoholu, a tak se holub opil a mohl se stěží pohybovat. Podle jiného příběhu, Napier věřil, že jeden z jeho sluhů krade jeho svršky. Oznamil, že jeho černý kohout zjistí hříšníka. Sluhové byli zavřeni do tmavé místnosti, kde byl každý z nich požádán, aby pohladil kohouta na zádech. Napier, aniž by něco řekl sluhům, namazal kohouta lampovou černí. Při odchodu z místnosti byl každý ze sluhů požádán, aby ukázal své ruce. Sluha, který byl vinen, se bál dotknout kohouta, vytáhl tedy čisté ruce a tak prozradil svou vinu.

Všechny tyto aktivity včetně zanícených náboženských kampaní se vyprávěly dlouho, než byly zapomenuty. Dnes je Napierovo jméno známo ne kvůli jeho nejvíce prodávané knize nebo jeho mechanickému důmyslu, ale

kvůli jeho abstraktním matematickým myšlenkám, které se rozvíjely po dvacet let jeho života: logaritmy. Poznamenejme v této souvislosti ještě to, že někdy bývá *přirozený logaritmus* ne příliš šťastně nazýván Napierovým logaritmem.

JOOST BÜRGI (1552 – 1632)

– švýcarský jemný mechanik, hodinář a výpočtář. Sestrojil nezávisle na Napierovi podobnou tabulku. Jestliže označíme jím zavedený logaritmus Bog, pak Bog je ve skutečnosti již obecný logaritmus, tj.

$$\text{Bog } x = \log_c x, \quad x \in (0, +\infty);$$

číslo c je definováno rovností $c = (1 + 10^{-4})^{10^4}$. Pro Bürgiho logaritmus již tedy platí (pro Napierův to neplatilo, šlo tedy vlastně o předchůdce logaritmu v našem smyslu)

$$\text{Bog } xy = \text{Bog } x + \text{Bog } y.$$

Tato rovnice ukazuje jasně význam logaritmů pro převod násobení na sčítání.

HENRY BRIGGS (1561 – 1630)

– anglický matematik, profesor matematiky na univerzitě v Cambridge, jeden z propagátorů Keplerových objevů. V roce 1615 navštívil Napiera a po diskusi s ním dospěl k „vylepšeným” logaritmům, které dnes nazýváme *dekadické logaritmy*. Jeho čtrnáctimístné tabulky byly publikovány v roce 1628; pro $\log_{10}$ samozřejmě platí také

$$\log_{10} xy = \log_{10} x + \log_{10} y.$$

Tím pochopitelně historie tabulek nekončí. Tak například JOHANNES KEPLER (1572 – 1630), který přišel roku 1600 do Prahy a stal se po smrti Tychona de Brahe dvorním hvězdářem Rudolfa II., používal pro své výpočty Napierovy tabulky, které si pak dále sám upravoval. Nakonec v roce 1624 vydal své vlastní logaritmické tabulky.

GREGOIRIE DE SAINT VINCENT (1584 – 1667)

– belgický Jezuita, s jehož jménem jsme se setkali v souvislosti s řešením problému kvadratury hyperboly. Ve své práci *Opus Geometricum* (1647) si povšiml, že jisté plochy odvozené od jejího grafu mají podobnou vlastnost jako dvojice aritmetické a geometrické posloupnosti. Teprve však jeho žák ALFONS ANTON DE SARASA (1618 – 1667) upozornil v práci *Problematis a Mersenne Propositi* (1649) na souvislost logaritmu a rovnoosé hyperboly o rovnici $xy = 1$. Uvážíme-li souvislost obsahu obrazce pod grafem funkce s integrálem, dostaneme pro $t \in (0, +\infty)$

$$A_{1,t} = \int_1^t \frac{dx}{x}.$$

Samozřejmě ještě mnoho dalších matematiků sehrálo významnou roli v rozvoji této oblasti matematiky. My však nemůžeme vzpomenout úplně všechny, ale jednomu z nich se věnovat musíme. Je to

LEONHARD EULER (1707 – 1783)

– geniální učenec, člen petrohradské a berlínské akademie věd, který po většinu svého života pobýval a pracoval v Rusku. Byl autorem více než 850 vědeckých prací, mezi nimiž bylo i kolek dvaceti dvousvazkových i třísvazkových monografií.

Při zavádění exponenciální a logaritmické funkce Euler používal *nekonečně velkých a nekonečně malých* čísel. Tento nástroj byl později z rigorózních matematických úvah vymýcen a vrátil se do nich v modifikované podobě teprve v tomto století ve formě *hyperreálných čísel*. Nekonečně malá čísla byla zdrojem četných rozporů, i když se s nimi na intuitivní úrovni lehce pracovalo. Pro náš výklad bylo podstatné, že pomocí tohoto nástroje dospěl k vyjádření e

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

a k vyjádření exponenciální funkce e^x

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$$

(N značí nekonečně velké číslo), kterou můžeme v soudobém označení přepsat do známého tvaru

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

V roce 1737 Euler také dokázal iracionalitu čísla e , důkaz transcendentce byl však ponechán francouzskému matematikovi, jímž byl, jak již víme, CHARLES HERMITE (1822 – 1901).

Poznamenejme ještě, že označení limity $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jako e pochází právě od Eulera, který tak učinil prvně v roce 1731 v dopise Goldbachovi. Ze začátku se tato limita označovala c , ale později, také díky Eulerově autoritě, se ujalo označení e .

Kapitola 17.

Fascinující číslo e

e =

2.718281828459045235360287471352662497757247093699959574966
967627724076630353547594571382178525166427427466391932003059
921817413596629043572900334295260595630738132328627943490763
233829880753195251019011573834187930702154089149934884167509
244761460668082264800168477411853742345442437107539077744992
069551702761838606261331384583000752044933826560297606737113
200709328709127443747047230696977209310141692836819025515108
657463772111252389784425056953696770785449969967946864454905
987931636889230098793127736178215424999229576351482208269895
193668033182528869398496465105820939239829488793320362509443
117301238197068416140397019837679320683282376464804295311802
328782509819455815301756717361332069811250996181881593041690
351598888519345807273866738589422879228499892086805825749279
610484198444363463244968487560233624827041978623209002160990
235304369941849146314093431738143640546253152096183690888707
016768396424378140592714563549061303107208510383750510115747
704171898610687396965521267154688957035035402123407849819334
321068170121005627880235193033224745015853904730419957777093
503660416997329725088687696640355570716226844716256079882651
787134195124665201030592123667719432527867539855894489697096
409754591856956380236370162112047742722836489613422516445078
182442352948636372141740238893441247963574370263755294448337
998016125492278509257782562092622648326277933386566481627725
164019105900491644998289315056604725802778631864155195653244
258698294695930801915298721172556347546396447910145904090586
298496791287406870504895858671747985466775757320568128845920
541334053922000113786300945560688166740016984205580403363795
376452030402432256613527836951177883863874439662532249850654
995886234281899707733276171783928034946501434558897071942586
398772754710962953741521115136835062752602326484728703920764
310059584116612054529703023647254929666938115137322753645098
889031360205724817658511806303644281231496550704751025446501
172721155519486685080036853228183152196003735625279449515828
418829478761085263981395599006737648292244375287184624578036
192981971399147564488262603903381441823262515097482798777996
437308997038886778227138360577297882412561190717663946507063
304527954661855096666185664709711344474016070462621568071748
187784437143698821855967095910259686200235371858874856965...

Pokračování: <http://www.missouri.edu/~c639692/exp/>

POUŽITÁ LITERATURA

- [Gi] J. P. Gilbert a F. Mosteller, *Recognizing the maximum of a sequence*, Amer. Statist. Assoc. **61** (1966), 35-73.
- [D2] Vojtěch Jarník, *Diferenciální počet II*, Academia, Praha, 1976.
- [I1] Vojtěch Jarník, *Integrální počet I*, Academia, Praha, 1974.
- [Kl] Felix Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus erster Band*, ruský překlad, Nauka, Moskva, 1987.
- [Ma] Eli Maor, *The Story of a Number*, Princeton University Press, Princeton, 1994.
- [Ru] Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1964.
- [Si] R. C. Shiflett a H. S. Shultz, *Can I expect a full set?*, Math. Gaz. **64** (1980), 262-266.
- [Sh] H. S. Shultz, *An expected value problem*, Two-Year College Math. **10** (1979), 179.
- [Sh] Harris S. Shultz, Bill Leonard, *Unexpected Occurrences of the Number e* , Mathematics magazine **62/4** (1989), 269-271.
- [Ša] Tibor Šalát, *e* , Matematické obzory **10** (1976), 43-56.
- [Ve] Jiří Veselý, *Matematická analýza pro učitele, První díl*, Matfyzpress, Praha, 1997.
- [Vs] Jiří Veselý, *Existuje královská cesta k exponenciále a logaritmu?*, Učitel matematiky **4/2** (1996), Grafex Blansko, 65-80.
- [Wa] Wolfgang Walter, *Analysis I*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.