MATEMATICKÁ INDUKCE

(viz Polák maturovat 1. díl 17/44 a PDF Mištovský „Důkazy")

(MI) se používá, máme-li dokázat nějakou mat. větu pro všechna $n \in N$, resp. pro všechna přirozená $n \geq n_0$, kde n_0 je dané přiroz. č.

nejčastěji 1

⇓ jde tedy o věty typu:

$\boxed{\forall n \in N,\ n \geq n_0 : V(n)}$ $(\forall n \in N : V(n))$

kde $V(n)$ je daná výroková forma (rovnost, nerovnost, apod.) proměnné $n \in N$.

(např. $\forall n \in N : \overbrace{1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2} n (n+1)}^{V(n)}$)

↳ důkaz za chvíli)

Princip důkazu MI je ve dvou krocích:

1. krok Dokážeme, že věta platí pro $n = n_0$ (nejčastěji je $n_0 = 1$, takže dokážeme, že věta platí pro jedničku); tedy ověříme platnost výroku $V(n_0)$

2. krok Dokážeme, že pro každé $k \in N$, $k \geq n_0$ platí implikace

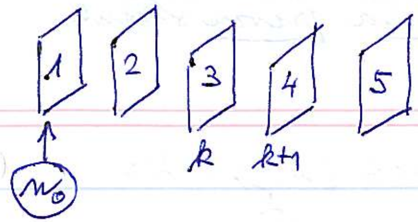
⇓

INDUKČNÍ KROK (PŘEDPOKLAD)

$\boxed{V(k) \Rightarrow V(k+1)}$

Pak už důkaz sám pokračuje automaticky do ∞

= DOMINOVÝ EFEKT



Dominové kostky

1) vím, že padla první ($V(1)$) [n_0]

2) vím, že když padne kterákoli, padne i následující ($V(k) \Rightarrow V(k+1)$ pro $\forall k \geq n_0$)

⇒ POTOM se to zřítí celé

Nyní ukážeme použití (MI)

nejprve na 1) příkladech z různých partií matem.

2) při konkrétně zaměřených na nalezení vzorce pro n-tý člen pomocí rekurent. vyjádření (RVP ⇒ VPN)

Př 1 Věta $\forall n \in N : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ Dokažte

= Gaussův vzorec

$$\left.\begin{array}{ccccc} 1 + & 2 + & 3 + & 4 + & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{array}\right\} \frac{5 \cdot 6}{2} = \underline{\underline{15}}$$

Důkaz MI

(1) $\boxed{n = 1}$ $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ OK

(2) Chci dokázat implikaci $\forall k \in N : V(k) \Rightarrow V(k+1)$

Konkrétně: $\forall k \in N : 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \overset{?}{\Rightarrow}$

$1 + 2 + 3 + \dots + k + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

čili $A \Rightarrow B$ … Chci dokázat, že platí (B) za předpokladu, že platí (A) %.

předpoklad

$\quad\quad\quad\quad L \quad\quad\quad P$

To (B) je rovnost, která má levou a pravou stranu

tedy: B : $\boxed{L = P}$

- Vezmu (L) a začnu ji upravovat (s využitím předpokladu (B)), dokud nedostanu (P)
- nebo někdy musím upravit (L) i (P), dokud nedostanu shodu

Konkrétně: $L = \underbrace{1 + 2 + \dots + k} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) =$

dle předpokladu (A) lze toto nahradit $\boxed{\frac{k(k+1)}{2}}$

$= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = P$. Čili ukázal jsem, že za předpokladu, že platí (A), platí i (B), čili implikace

$V(k) \Rightarrow V(k+1)$ je dokázána.

A domino právě se rychle promítlo do ∞!

DOK.

(Př2) $\boxed{\text{Dokažte větu: } \forall n \in N: 2+4+6+\dots+2n = n(n+1)}$

1) $n=1$ $\quad L=2,\ P=2$ OK ($V(1)$ platí)

2) Chci dokázat $\forall k \in N: V(k) \Rightarrow V(k+1)$

Tedy: $\boxed{\forall k \in N: 2+4+6+\dots+2n = n(n+1) \Rightarrow 2+4+6+\dots+2n + 2(n+1) = (n+1)(n+2)}$

(4) $V(k+1)$ má opět tvar $L = P$

$\rightarrow L = \underbrace{2+4+6+\dots+2n} + 2(n+1)$

dle předpokladu implikace se to rovná $n(n+1)$

$\Rightarrow L = n(n+1) + 2(n+1) = (n+1)(n+2) = P$ dok

(Př3) $\boxed{\text{Dokažte větu: } \forall n \in N: 1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2}$

1) $\boxed{n=1}$ $\quad L=1 \quad P=1^2 \rightarrow L=P$ OK

2) ? $\forall k \in N: V(k) \Rightarrow V(k+1)$

tedy ? $\boxed{\forall k \in N: 1+3+5+\dots+(2k-1) = k^2 \Rightarrow 1+3+5+\dots+(2k-1)+(2k+1) = (k+1)^2}$

$V(k+1)$ je rovnost typu $L = P$

$L = \underbrace{1+3+5+\dots+(2k-1)}_{k^2} + (2k+1) = k^2+2k+1 = (k+1)^2 \stackrel{?}{=} P$

dok

$\boxed{\text{Shrnutí Př1} \div \text{Př3}}$ → k formulce se vrátíme, až budeme dělat řady

$1+2+3+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ → součet prvních n přiroz.

$2+4+6+\dots+2n = n(n+1)$ → součet prvních n sudých

$1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$ → součet prvních n lichých

3) Kontrola: $\underbrace{1 + \boxed{2} + 3 + \boxed{4} + 5 + \boxed{6}}_{2n \text{ celkem}} \Rightarrow \underbrace{n \text{ sudých},\ n \text{ lichých}}_{2n \text{ všech}}$

$\left.\begin{array}{l} n \text{ sudých}: n^2+n \\ n \text{ lichých}: n^2 \end{array}\right\}$ součet $= 2n^2+n$ $\Big\}$ OK!

2n celkem: $\frac{1}{2}(2n)(2n+1) = 2n^2+n$

Př 4 Dokažte:

$$\forall n \in N: 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

1) $n=1$ OK

2) ? $\forall k \in N: V(k) \Rightarrow V(k+1)$

formální chyba místo (n) má být (k)

tedy: $\forall k \in N: 1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{1}{6}(n)(n+1)(2n+1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{1^2+2^2+\dots+n^2+(n+1)^2}_{L} = \underbrace{\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)}_{P}$$

$$L = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{1}{6} n(2n+1) + n+1\right)$$

$$= (n+1)\left(\frac{2n^2+n+6n+6}{6}\right) = (n+1)\cdot\frac{1}{6}(2n^2+7n+6)$$

$$P = (n+1)\cdot\frac{1}{6}(2n^2+7n+6) = L$$ **dok!**

Př 5 Dokažte

$$\forall n \in N: 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$$

1) $n=1$ OK

2) ? $\forall k \in N: V(k) \Rightarrow V(k+1)$

formální chyba: místo (n) má být (k)!

tedy: $\forall k \in N: 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{1^3+2^3+\dots+n^3+(n+1)^3}_{L} = \underbrace{\frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2}_{P}$$

$$L = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{1}{4} n^2 + n+1\right)$$

$$P = \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2+4n+4) = (n+1)^2\left(\frac{1}{4} n^2+n+1\right)$$

$L = P$ **dok**

Poznámka:

Zajímavý vztah Dokázali jsme $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$

což se dá napsat jako $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, což je ale dle Př 1 $(1+2+3+\dots+n)^2$

Platí tedy:

$$\forall n \in N: 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = (1+2+3+\dots+n)^2$$

Př 6 Dokažte

$$\forall n \in N: \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

1) $n=1$: OK

2) (?) $\forall k \in N: V(k) \Rightarrow V(k+1)$

tedy: $\forall k \in N: \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1} \overset{?}{\Rightarrow}$

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}}_{L} = \underbrace{\frac{k+1}{k+2}}_{P}$$

$$L = \frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} = P$$ **dok**

Poznámka

Složitější zadání: Najděte vzorec pro součet prvních (n) členů posloupnosti $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$

$a_1 = \frac{1}{2}$ $s_1 = a_1 = \frac{1}{2}$

$a_2 = \frac{1}{6}$ $s_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

$a_3 = \frac{1}{12}$ $s_3 = \frac{2}{3}+\frac{1}{12} = \frac{3}{4}$

$a_4 = \frac{1}{20}$ $s_4 = \frac{3}{4}+\frac{1}{20} = \frac{4}{5}$

$a_5 = \frac{1}{30}$ $s_5 =$ atd

Hypotéza?

$$\boxed{s_n = \frac{n}{n+1}}$$

Tu pak dokážu MI viz výše

Podobně složitěji lze formulovat i ostatní příklady, které jsme předtím dělali!

PF7

Dokažte!

$$\forall n \in N: \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

1) $n=1$ OK

2) ? $\forall k \in N: V(k) \Rightarrow V(k+1)$

Pozor – zase jsem měl dát místo n k!

tedy: $\forall k \in N: \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} \dots = \frac{n}{2n+1} \Rightarrow$

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \underbrace{\frac{n+1}{2n+3}}_{P}$$

$$L = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{2n+3} = \frac{1}{2n+1}\left(n + \frac{1}{2n+3}\right) =$$

$= \frac{1}{2n+1}\,\frac{2n^2+3n+1}{2n+3}$. Aby se to rovnalo P, stačí ukázat, že $\frac{2n^2+3n+1}{2n+1} = n+1$, což je pravda, neb $(2n+1)(n+1) = 2n^2+3n+1$. Dok.

PF8

Dokažte

$$\forall n \in N: 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

1) $n=1$ OK

2) ? $\forall k \in N: V(k) \Rightarrow V(k+1)$

Zase jsem místo n k

tedy: $\forall k \in N: 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \dots n(n+1) = \bigcirc \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \dots n(n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$L = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) = (n+1)(n+2)\left(\frac{1}{3}n + 1\right) = P$$

dok

- (HI) Součty -

PF

Dokažte $\forall n \in N$:

$$1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

① $n=1$: $1\cdot 2\cdot 3 = 6$, $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{4} = 6$ OK

② ? $\forall k \in N: 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \dots n(n+1)(n+2) = \frac{(\ )(\ )(\ )}{4} \Rightarrow$

místo n má být k

$$\Rightarrow 1\cdot 2\cdot 3 + \dots + n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)(n+3) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$$

$$L = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3) =$$

$$= (n+1)(n+2)(n+3)\left(\frac{n}{4} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4} = P$$

dok

(Př) Dokažte:
$\forall n \in N: \ 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n n! = (n+1)! - 1$

① $\boxed{n=1}$ $\quad 1 \cdot 1! = \underline{\underline{1}} \qquad (1+1)! - 1 = \underline{\underline{1}}$ OK

② ?: $\forall k \in N: 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + k k! = (k+1)! - 1 \Rightarrow$
$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + k \cdot k! + (k+1)(k+1)! = (k+2)! - 1$

$L = (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! = (k+1)!(k+2) - 1 =$

$= (k+2)! - 1 = P$ dok.

(Př) Dokaž: $\forall n \in N_0: \ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

① $\boxed{n=0}$ $\quad \binom{0}{0} = \underline{1} \qquad 2^0 = \underline{1} \rightarrow$ OK

② $\forall k \in N_0: \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \dots \binom{k}{k} = 2^k \Rightarrow$

$\Downarrow$?

$\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \dots \binom{k+1}{k+1} = 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k = 2^k + 2^k$

FINTA: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \dots + \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} = 2^k$$
$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \dots + \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} = 2^k$$
sečtu

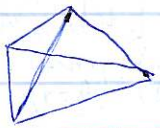
$$\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{2} + \binom{k+1}{3} + \dots + \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1} = 2^{k+1}$$ dok.

Jeden geometrický důkaz

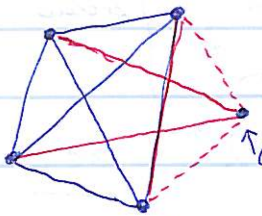
Př) Dokaž, že pro počet úhlopříček p_n v konvexním n-úhelníku $(n > 3)$ platí

$$p_n = \frac{1}{2}n(n-3)$$

1) $\boxed{n=4}$ $p_4 = \frac{1}{2}\cdot 4(4-3) = \underline{\underline{2}}$ OK



2) $\forall k \in N: \; p_k = \frac{1}{2}k(k-3) \overset{?}{\Rightarrow} p_{k+1} = \frac{1}{2}(k+1)(k-2)$



$\underbrace{\qquad}$ k bodů $\Rightarrow$ přibyde $k-2$ úhlopříček + 1 strana se stane úhlopříčkou

$\Rightarrow$ celkem $\boxed{k-1}$

tohle je vlastně rekur. vzorec

$$\boxed{p_{k+1} = p_k + (k-1)}$$

$$p_{k+1} = \frac{1}{2}k(k-3) + (k-1) = \frac{k^2 - 3k + 2k - 2}{2} = \frac{k^2 - k - 2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$$

dok

– (MI) - nerovnosti –

Takže dosud byly zatím samé součty (až na ten geom.)

Pomocí (MI) se dají ale dokaz. také nerovnosti:

Př 9 Dokažte:

$$\forall n \in N: \; 2^{n+2} > 2n + 5$$

1) $\boxed{n=1}$ $2^3 > 7$ JO

indukční krok

2) $\forall k \in N: V(k) \Rightarrow V(k+1)$

tedy: $\boxed{\forall k \in N: \; 2^{k+2} > 2k+5 \Rightarrow 2^{k+3} > 2k+7}$

nyní dokazuji nerovnost $\boxed{L > P}$

$$L = 2^{k+3} = \underbrace{2^{k+2}}_{> 2k+5}\cdot 2 > (2k+5)\cdot 2 = 4k + 10 = (2k+7) + (2k+3) > 2k+7 = P$$

dok

Př 10 Dokažte:

$$\forall n \in N: \; \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} > 1$$

1) $\boxed{n=1}$ $\frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12} > 1$

$3n = 3$ $\quad 3n+1 = 4$

2) $\forall k \in N: V(k) \Rightarrow V(k+1)$

~~$\forall k \in N: \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{3k+1} > 1 \Rightarrow \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+4}$~~

~~$L = \dots + \frac{1}{3n+2} > 1 = P$ dok~~

Pozor $n = 2: \; \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ → navíc oproti $n = 1$

$$n = 3: \; \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}}_{\text{navíc oproti } n = 2}$$

$\Rightarrow$ pro $k+1$ bude poslední člen $\frac{1}{3k+4}$ a předním $\Rightarrow$ ještě $3k+3$ a $3k+2$!

(2) **indukční krok**

$$\forall k \in N: \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots \frac{1}{3k+1} > 1 \Rightarrow$$
$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} > 1$$

$\to \boxed{L > P}$ ~~(A) > 1 dle indukč. předpokladu~~

$$\cancel{L = A + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4}}$$

$\boxed{\text{Posor}}$: Tohlencto ◯ nezačíná na $\boxed{\frac{1}{k+1}}$!

Zde to udělám trochu jinak než ~~...~~ předtím:

- Vezmu první nerovnost: $\left.\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{3k+1} > 1 \right\}$ indukční předpoklad

- Odečtu od obou stran $\frac{1}{k+1}$:

$$\frac{1}{k+2} + \cdots \frac{1}{3k+1} > 1 - \frac{1}{k+1} \quad = \frac{3}{3k+3}$$

- K oběma stranám přičtu trojici, která je u $(k+1)$ navíc:

$$\underbrace{\frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{3k+4}}_{A+\boxed{}} > 1 - \underbrace{\frac{3}{3k+3} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4}}$$

$$\frac{-3}{3k+3} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} = \quad \text{upravím zvlášť:}$$

$$= \frac{-2(3k+2)(3k+4) + (3k+3)(3k+4) + (3k+2)(3k+3)}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)}$$

$$= \frac{\cancel{-18k^2} - \cancel{36k} - 16 + \cancel{9k^2} + \cancel{21k} + 12 + \cancel{9k^2} + \cancel{15k} + 6}{(\ )(\ )(\ )}$$

$$\left.= \frac{2}{(\ )(\ )(\ )}\right\} \text{určitě} > 0$$

Tedy $\frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{3k+4} > 1 + \frac{2}{(\ )(\ )(\ )} > 1$ **Dok.**

– (MI): nerovnosti –

(Př) **Dokažte**: $\forall n \in N,\ n > 1$ platí:
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

Zde poprvé nezačíná n od 1, ale až od $\underline{2}$

1) $\boxed{n=2}$ $\quad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$ OK ($2n = 4$)

(Pozn. – všimněme si, že pro $n = 1$ to ještě neplatí: $n=1 \quad \frac{1}{2} = \frac{12}{24} \not> \frac{13}{24}$!)

2) (?) $\forall k \in N: V(k) \Rightarrow V(k+1)$?

$$\text{tedy } \forall k \in N: \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24} \Rightarrow$$
$$\frac{1}{k+2} + \cdots \frac{1}{2k} + \boxed{\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}} > \frac{13}{24}$$

opět to nezačíná na $\frac{1}{k+1}$! $\Rightarrow$ jako předtím,

- vezmu 1. nerovnost, odečtu $\frac{1}{k+1}$ a přičtu $\boxed{}$:

$$\frac{1}{k+2} + \cdots \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} > \frac{13}{24} - \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{\frac{2}{2k+2}} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} =$$

$$= \frac{13}{24} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \frac{13}{24} + \frac{2k+2-2k-1}{(2k+1)(2k+2)}$$

$$= \frac{13}{24} + \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} > \frac{13}{24} \quad \textbf{Dok}$$

(Př) $\boxed{\text{Dokažte, že } \forall n \in N,\ n > 4 \text{ platí } 2^n > n^2}$

① $\boxed{n=5}$ $\quad 2^5 = 32 > 5^2 = 25$ ok

② $\forall \underset{(n>5)}{k \in N} : V(k) \Rightarrow V(k+1)$

$$\boxed{\forall \underset{(n>5)}{k \in N} : 2^k > k^2 \Rightarrow 2^{k+1} > (k+1)^2}$$

$$2^{k+1} = \underbrace{2^k}_{>k^2} \cdot 2 > 2k^2$$

Teď potřebuju ukázat, že to $\boxed{2k^2 > (k+1)^2}$ (pro $k \geq 5$ stačí)

- na to bych mohl znovu použít matematickou (MI), ale místo toho můžu postupovat takto:

$$2k^2 = (k+1)^2 + \underbrace{k^2 - 2k - 1}_{\text{teď stačí ukázat, že tohle je } \geq 0}$$ (trik)

(stačí pro $n \geq 5$)

- $k^2 - 2k - 1 = \underbrace{\underbrace{(k-1)^2}_{\text{tohle je pro } k \geq 3 \text{ určitě } > 2} - 2}_{\text{tohle je pro } k \geq 3 \text{ určitě } > 0}$ (tím spíš pro $k \geq 5$)

$\Rightarrow 2k^2$ je pro $k \geq 3$ určitě $> (k+1)^2$

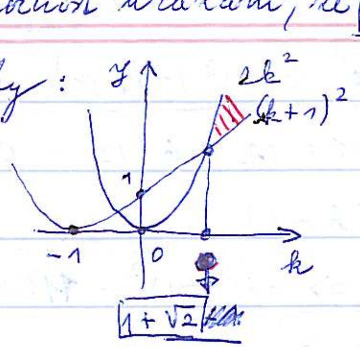
tedy dohromady $2^{k+1} > 2k^2 > (k+1)^2$

dok

– nerovnosti –

Další možnost ukázání, že $\boxed{2k^2 > (k+1)^2}$ je

graficky:



průsečík:

$2k^2 = (k+1)^2$

$2k^2 = k^2 + 2k + 1$

$k^2 - 2k - 1 = 0$

$D = 4 + 4 = 8$

$k_{1,2} = \frac{+2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = +1 \pm \sqrt{2}$

$\Rightarrow$ pro $k \in N$ je první k větší než $1+\sqrt{2}$ $\quad k = 3$

$\Rightarrow$ pro $k \geq 3$ je $2k^2 > (k+1)^2$

(Př) Dokažte $\boxed{\forall n \in N,\ n > 2 \text{ je } 2^n > 2n+1}$

① $\boxed{n=3}$ $\quad 2^3 = 8 > 7$ ok

② ? $\forall k \in N,\ n > 2 : \boxed{2^k > 2k+1 \Rightarrow 2^{k+1} > 2k+3}$ Dok

$$2^{k+1} = \underbrace{2^k}_{>2k+1} \cdot 2 > 4k + 2 = (2k+3) + \underbrace{(2k-1)}_{\text{pro } k \in N \text{ je tohle } (+)} > 2k+3$$

Další typ důkazů na (MI) je dělitelnost

%

Dopředele — dělitelnost —

furt zapomínám na to (k)

Př: Dokažte: $\forall n \in \mathbb{N}$ je $n^3 + 11n$ dělitelné 6

čili $\forall n \in \mathbb{N}: 6 \mid (n^3 + 11n)$

1) $\boxed{n = 1}$ $n^3 + 11n = 1 + 11 = 12 \rightarrow 6 \mid 12 \rightarrow$ OK

2) $? \forall k \in \mathbb{N}: V(k) \Rightarrow V(k+1)$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}: 6 \mid n^3 + 11n \Rightarrow 6 \mid (n+1)^3 + 11(n+1)}$$

$$(n+1)^3 + 11(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 11n + 11 =$$

$$= \underbrace{n^3 + 11n}_{\text{děl. 6}} + \underbrace{\underbrace{3n}_{\text{děl 3}}\underbrace{(n+1)}_{\text{děl 2}}}_{\text{děl. 6}} + \underbrace{12}_{\text{děl. 6}} = 6 \cdot \text{něco}$$

dok.

Př: Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N}: 9 \mid 4^n + 15n - 1$

2 vnořené MI

!

1) $\boxed{n = 1}$ 18 OK

2) $\forall k \in \mathbb{N}: V(k) \Rightarrow V(k+1)$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}: 9 \mid 4^n + 15n - 1 \overset{?}{\Rightarrow} 9 \mid 4^{n+1} + 15(n+1) - 1}$$

$$4^n \cdot 4 + 15n + 14 = \underbrace{(4^n + 15n - 1)}_{\text{děl. 9}} + (3 \cdot 4^n + 15)$$

musím ukázat, že i tohle je děl. 9

$= 3(4^n + 5)$

čili stačí dokázat, že

$\boxed{3 \mid 4^k + 5} \Rightarrow$ Další (MI):

$$\boxed{3 \mid 4^k + 5 \Rightarrow 3 \mid 4^{k+1} + 5}$$

$$4^{k+1} + 5 = \underbrace{4^k + 5}_{\text{děl 3}} + \underbrace{3 \cdot 4^k}_{\text{děl 3}}$$ dok.

dok.

— dělitelnost —

Př: Dokažte: $\forall n \in \mathbb{N}: 4 \mid 5^n - 1$

1) $n = 1$ OK

2) $$5^{n+1} - 1 = \underbrace{5^n - 1}_{\text{děl 4}} + \underbrace{4 \cdot 5^n}_{\text{děl 4}}$$

dok.

Př: Dokažte $\forall n \in \mathbb{N}: 24 \mid 25^n + 23$

1) $n = 1$ OK

2) $$25^{n+1} + 23 = \underbrace{25^n + 23}_{\text{děl 24}} + \underbrace{24 \cdot 25^n}_{\text{děl 24}}$$

Dok.

Př: Dokažte

$\forall n \in \mathbb{N}: 16^n - 15n - 1$ je dělitelné 225

1) $n = 1$ OK

2) $$16^{n+1} - 15(n+1) - 1 = \underbrace{16^n - 15n - 1}_{\text{děl 225}} + 15 \cdot 16^n - 15$$

$= 15(16^n - 1)$

$$16^{n+1} - 1 = 16^n \cdot 16 - 1 = \underbrace{16^n - 1}_{\text{děl 15}} + \underbrace{15 \cdot 16^n}_{\text{děl. 15}}$$ Dok.

ukázali, že je děl. 15

dok.

Př: Dokažte, že pro žádné $n \in \mathbb{N}$ není $2^{3n} + 3^{4n}$ dělitelné 73

1) $n = 1$ OK $73 \nmid$

2) $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}: 73 \nmid 2^{3k} + 3^{4k} \Rightarrow 73 \nmid 2^{3k+3} + 3^{4k+4}}$$

$$2^{3k+3} + 3^{4k+4} = 2^{3k} \cdot 8 + 3^{4k} \cdot \underbrace{81}_{8+73} = \underbrace{8(2^{3k} + 3^{4k})}_{\text{není děl. 73}} + \underbrace{73 \cdot 3^{4k}}_{\text{není děl. 73}}$$

Dok.

PŘ Dokažte $\forall n \in N: 4 \mid (n^4 + 3n^2)$

① $n=1$ OK

② $\forall k \in N: 4 \mid (k^4 + 3k^2) \overset{?}{\Rightarrow} 4 \mid (k+1)^4 + 3(k+1)^2$

$$(k+1)^4 + 3(k+1)^2 = (k+1)^2\left((k+1)^2 + 3\right) = (k^2+2k+1)(k^2+2k+4) =$$
$$= k^4 + 2k^3 + 4k^2 + 2k^3 + 4k^2 + 8k + k^2 + 2k + 4 =$$
$$= k^4 + 4k^3 + 9k^2 + 10k + 4 = \underbrace{(k^4 + 3k^2)}_{\text{děl. } 4} + \underbrace{(4k^3 + 6k^2 + 10k + 4)}_{\text{stačí ukázat, že tohle je děl. } 4}$$

$$\rightarrow 4k^3 + 6k^2 + 10k + 4 = \underbrace{4k^3 + 4}_{\text{děl } 4} + \underbrace{6k^2 + 10k}_{\text{stačí dok, že to je děl. } 4}$$

$$\rightarrow 6k^2 + 10k = 2\underbrace{(3k^2 + 5k)}_{\text{stačí dok. dělitelnost } 2}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{2.\ MI}$: $k=1$ OK; $\forall k \in N: 2 \mid 3k^2 + 5k \Rightarrow 2 \mid 3(k+1)^2 + 5(k+1)$

$$3(k^2+2k+1) + 5k + 5 = 3k^2 + 11k + 8 = \underbrace{3k^2 + 5k}_{\text{děl } 2} + \underbrace{6k + 8}_{\text{děl } 2}$$

OK

– Dělitelnost –

PŘ $\forall n \in N: 9 \mid 10^n - 1$

1) $n=1$ OK

2) $\forall k \in N: 9 \mid (10^k - 1) \Rightarrow 9 \mid (10^{k+1} - 1)$

$$10^{k+1} - 1 = 10^k \cdot 10 - 1 = \underbrace{10^k - 1}_{\text{děl. } 9} + \underbrace{9 \cdot 10^k}_{\text{děl } 9}$$

dok

PŘ $\forall n \in N \setminus \{1\}: 3 \mid (10^n + 4^n - 2)$

① $n=1$ OK

② $\forall k \in N \setminus \{1\}: 3 \mid 10^n + 4^n - 2 \Rightarrow 3 \mid 10^{n+1} + 4^{n+1} - 2$

$$10^{n+1} + 4^{n+1} - 2 = \underbrace{10^n + 4^n - 2}_{\text{děl. } 3} + \underbrace{9 \cdot 10^n + 3 \cdot 4^n}_{\text{děl } 3}$$

dok

PŘ $\forall n \in N: 31 \mid 5^{n+1} + 6^{2n-1}$

1) $n=1$: $25 + 6 = 31$ ok

2) $\forall k \in N: 31 \mid 5^{n+1} + 6^{2n-1} \Rightarrow 31 \mid 5^{n+2} + 6^{2n+1}$

$$5^{n+2} + 6^{2n+1} = \underbrace{5^{n+1} + 6^{2n-1}}_{\text{děl. } 31} + \underbrace{4 \cdot 5^{n+1} + 35 \cdot 6^{2n-1}}_{\text{stačí ukázat, že tohle je děl. } 31}$$

$35 = 31 + 4$! $\Rightarrow$ (∗∗)

(∗) $6^{2n-1+2} = 6^2 \cdot 6^{2n-1} = 36 \cdot 6^{2n-1}$

(∗) $5^{n+2} = 5^{n+1+1} = 5^{n+1} \cdot 5$

(∗∗) $4 \cdot 5^{n+1} + 35 \cdot 6^{2n-1} = 4 \cdot 5^{n+1} + 4 \cdot 6^{2n-1} + \underbrace{31 \cdot 6^{2n-1}}_{\text{děl. } 31}$
$= 4\underbrace{(5^{n+1} + 6^{2n-1})}_{\text{děl } 31}$

dok