

Derivace a průběh funkce.

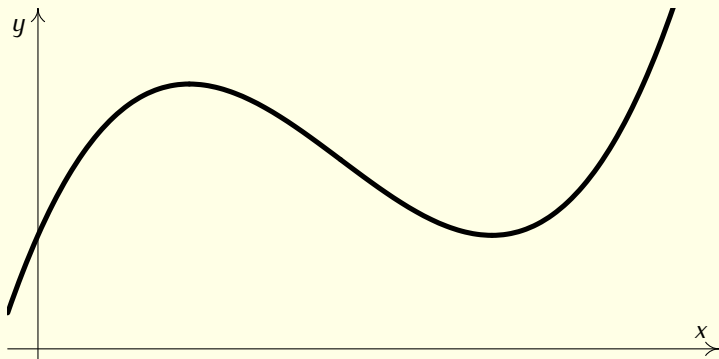
Robert Mařík

25. října 2007

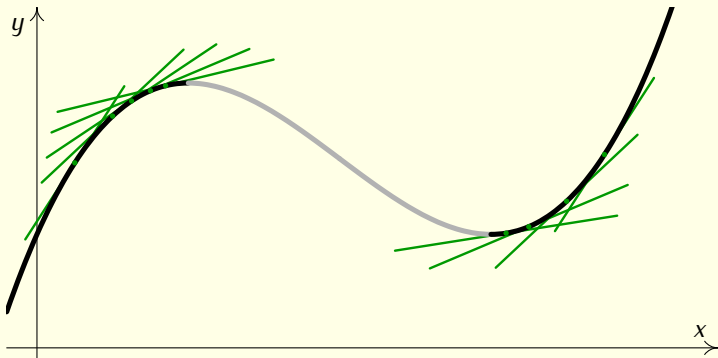
Obsah

1	Základní myšlenky.	2
2	Přesné věty a definice	10
3	Okolí nevlastních bodů.	16
4	Sestrojení grafu funkce.	19

1 Základní myšlenky.



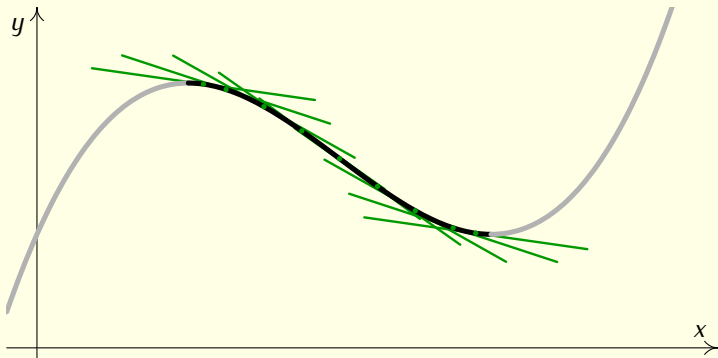
Uvažujme následující funkci.



Derivace je kladná (= směrnice tečny je kladná)

⇒ **tečna** je rostoucí

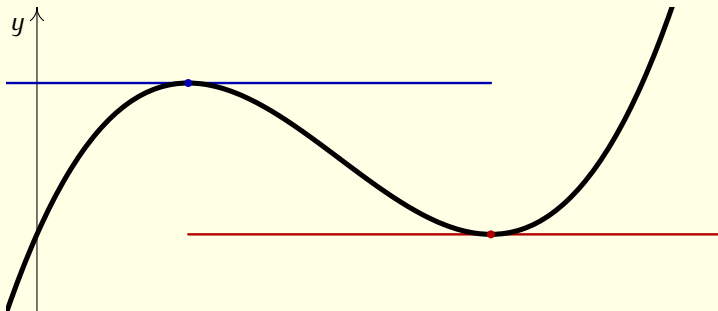
⇒ **funkce** je rostoucí.



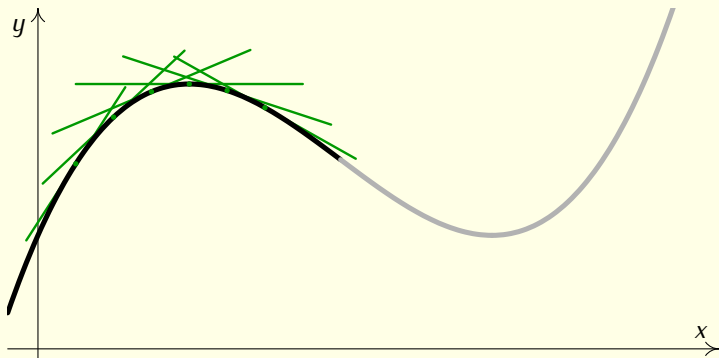
Derivace je záporná (= směrnice tečny je záporná)

⇒ **tečna** je klesající

⇒ **funkce** je klesající.



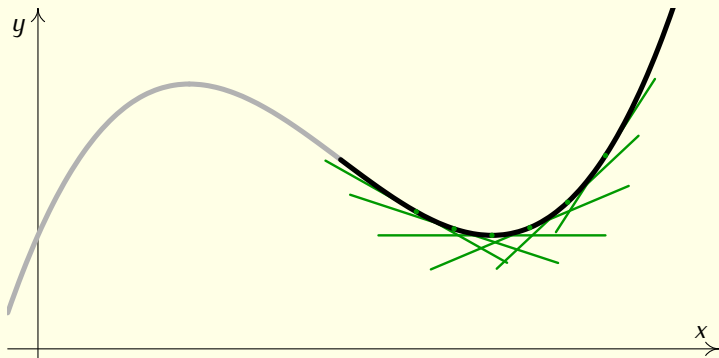
- **Lokální maximum** (bod, v jehož okolí není žádná vyšší funkční hodnota) má spojitá funkce v bodě, kde se mění z rostoucí na klesající.
- **Lokální minimum** (bod, v jehož okolí není žádná nižší funkční hodnota) má spojitá funkce v bodě, kde se mění z klesající na rostoucí.
- Je-li derivace nenulová, funkce nedosahuje lokálního extrému. **Je-li v bodě lokální extrém, pak je derivace buď nulová ($\equiv$: stacionární bod) nebo derivace neexistuje.**



$y'' < 0$ (y' má zápornou derivaci a tedy klesá)

⇒ růst se zpomaluje a případně se mění na pokles; pokles se zrychluje

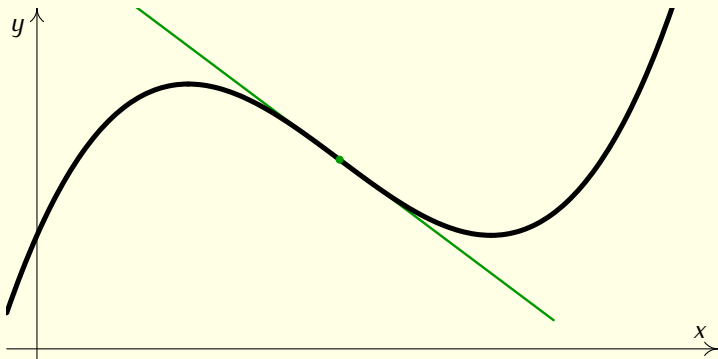
⇒ funkce je v okolí bodu dotyku **pod tečnou** (=: **konkávní**)



$y'' > 0$ (y' má kladnou derivaci a tedy roste)

⇒ růst se zrychluje; pokles zpomaluje a případně se mění na růst

⇒ funkce je v okolí bodu dotyku **nad tečnou** (=: konvexní)



Konvexnost se změní na konkavitu, nebo naopak, (= **funkce má inflexní bod**) jedině v bodě, kde se změní znaménko druhé derivace, tj. jedině **v bodě, kde je druhá derivace nulová, nebo kde má bod nespojitosti (a potom druhá derivace neexistuje)**. V inflexním bodě je nárůst nebo pokles funkčních hodnot nejrychlejší nebo nejpomalejší.

2 Přesné věty a definice

Definice (lokální extrém). Buď f funkce a $x_0 \in \text{Dom}(f)$.

- Řekneme, že funkce má v bodě x_0 *lokální maximum*, jestliže existuje ryzí okolí $\overline{O}(x_0)$, takové, že $f(x_0) \geq f(x)$ pro všechna $x \in \overline{O}(x_0)$. Je-li nerovnost ostrá, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 *ostré lokální maximum*.
- Platí-li opačné nerovnosti, říkáme, že funkce má v bodě x_0 *lokální minimum* a *ostré lokální minimum*.
- Lokální maximum a minimum nazýváme společným názvem *lokální extrémy*. Ostré lokální maximum a ostré lokální minimum nazýváme společným názvem *ostré lokální extrémy*.

Definice (lokální extrém). Buď f funkce a $x_0 \in \text{Dom}(f)$.

- Řekneme, že funkce má v bodě x_0 *lokální maximum*, jestliže existuje ryzí okolí $\overline{O}(x_0)$, takové, že $f(x_0) \geq f(x)$ pro všechna $x \in \overline{O}(x_0)$. Je-li nerovnost ostrá, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 *ostré lokální maximum*.
- Platí-li opačné nerovnosti, říkáme, že funkce má v bodě x_0 *lokální minimum* a *ostré lokální minimum*.
- Lokální maximum a minimum nazýváme společným názvem *lokální extrémy*. Ostré lokální maximum a ostré lokální minimum nazýváme společným názvem *ostré lokální extrémy*.

Definice (lokální extrém). Buď f funkce a $x_0 \in \text{Dom}(f)$.

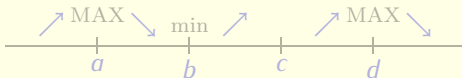
- Řekneme, že funkce má v bodě x_0 *lokální maximum*, jestliže existuje ryzí okolí $\overline{O}(x_0)$, takové, že $f(x_0) \geq f(x)$ pro všechna $x \in \overline{O}(x_0)$. Je-li nerovnost ostrá, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 *ostré lokální maximum*.
- Platí-li opačné nerovnosti, říkáme, že funkce má v bodě x_0 *lokální minimum* a *ostré lokální minimum*.
- Lokální maximum a minimum nazýváme společným názvem *lokální extrémy*. Ostré lokální maximum a ostré lokální minimum nazýváme společným názvem *ostré lokální extrémy*.

Věta 1 (postačující podmínky pro existenci a neexistenci lokálních extrémů).

Bud' f funkce definovaná a spojitá v nějakém okolí bodu x_0 .

- Jestliže existuje levé okolí bodu x_0 , ve kterém je funkce rostoucí a pravé okolí bodu x_0 , ve kterém je funkce klesající, je bod x_0 bodem ostrého lokálního maxima funkce f .
- Jestliže existuje levé okolí bodu x_0 , ve kterém je funkce klesající a pravé okolí bodu x_0 , ve kterém je funkce rostoucí, je bod x_0 bodem ostrého lokálního minima funkce f .
- Jestliže existuje okolí bodu x_0 ve kterém je funkce ryze monotonní, lokální extrém v bodě x_0 nenastává.

Poznámka 1. Graficky můžeme předchozí větu ilustrovat následovně.

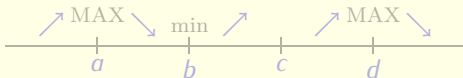


Věta 1 (postačující podmínky pro existenci a neexistenci lokálních extrémů).

Bud' f funkce definovaná a spojitá v nějakém okolí bodu x_0 .

- Jestliže existuje levé okolí bodu x_0 , ve kterém je funkce rostoucí a pravé okolí bodu x_0 , ve kterém je funkce klesající, je bod x_0 bodem ostrého lokálního maxima funkce f .
- Jestliže existuje levé okolí bodu x_0 , ve kterém je funkce klesající a pravé okolí bodu x_0 , ve kterém je funkce rostoucí, je bod x_0 bodem ostrého lokálního minima funkce f .
- Jestliže existuje okolí bodu x_0 ve kterém je funkce ryze monotonní, lokální extrém v bodě x_0 nenastává.

Poznámka 1. Graficky můžeme předchozí větu ilustrovat následovně.

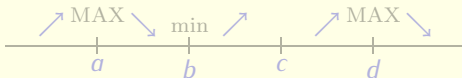


Věta 1 (postačující podmínky pro existenci a neexistenci lokálních extrémů).

Bud' f funkce definovaná a spojitá v nějakém okolí bodu x_0 .

- Jestliže existuje levé okolí bodu x_0 , ve kterém je funkce rostoucí a pravé okolí bodu x_0 , ve kterém je funkce klesající, je bod x_0 bodem ostrého lokálního maxima funkce f .
- Jestliže existuje levé okolí bodu x_0 , ve kterém je funkce klesající a pravé okolí bodu x_0 , ve kterém je funkce rostoucí, je bod x_0 bodem ostrého lokálního minima funkce f .
- Jestliže existuje okolí bodu x_0 ve kterém je funkce ryze monotonní, lokální extrém v bodě x_0 nenastává.

Poznámka 1. Graficky můžeme předchozí větu ilustrovat následovně.

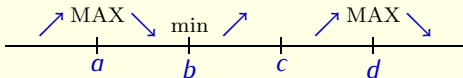


Věta 1 (postačující podmínky pro existenci a neexistenci lokálních extrémů).

Bud' f funkce definovaná a spojitá v nějakém okolí bodu x_0 .

- Jestliže existuje levé okolí bodu x_0 , ve kterém je funkce rostoucí a pravé okolí bodu x_0 , ve kterém je funkce klesající, je bod x_0 bodem ostrého lokálního maxima funkce f .
- Jestliže existuje levé okolí bodu x_0 , ve kterém je funkce klesající a pravé okolí bodu x_0 , ve kterém je funkce rostoucí, je bod x_0 bodem ostrého lokálního minima funkce f .
- Jestliže existuje okolí bodu x_0 ve kterém je funkce ryze monotonní, lokální extrém v bodě x_0 nenastává.

Poznámka 1. Graficky můžeme předchozí větu ilustrovat následovně.



Věta 2 (souvinnost derivace a monotonie). Necht' funkce f má derivaci na otevřeném intervalu I .

- Je-li $f'(x) > 0$ na intervalu I , je funkce f rostoucí na I .
- Je-li $f'(x) < 0$ na intervalu I , je funkce f klesající na I .

Definice (stacionární bod). Řekneme, že bod x_0 je *stacionárním bodem* funkce f , jestliže funkce f má v bodě x_0 nulovou derivaci, tj. $f'(x_0) = 0$.

Poznámka 2 (geometrický význam). Geometricky jsou stacionární body body, ve kterých má graf funkce vodorovnou tečnu (proč?).

Věta 3 (souvinnost derivace a lokálních extrémů). Necht' má funkce v bodě x_0 lokální extrém. Pak funkce f v bodě x_0 buď nemá derivaci, nebo je tato derivace nulová, tj. platí $f'(x_0) = 0$ a x_0 je stacionárním bodem funkce f .

Věta 2 (souvinnost derivace a monotonie). Necht' funkce f má derivaci na otevřeném intervalu I .

- Je-li $f'(x) > 0$ na intervalu I , je funkce f rostoucí na I .
- Je-li $f'(x) < 0$ na intervalu I , je funkce f klesající na I .

Definice (stacionární bod). Řekneme, že bod x_0 je *stacionárním bodem* funkce f , jestliže funkce f má v bodě x_0 nulovou derivaci, tj. $f'(x_0) = 0$.

Poznámka 2 (geometrický význam). Geometricky jsou stacionární body body, ve kterých má graf funkce vodorovnou tečnu (proč?).

Věta 3 (souvinnost derivace a lokálních extrémů). Necht' má funkce v bodě x_0 lokální extrém. Pak funkce f v bodě x_0 buď nemá derivaci, nebo je tato derivace nulová, tj. platí $f'(x_0) = 0$ a x_0 je stacionárním bodem funkce f .

Věta 2 (souvinnost derivace a monotonie). Necht' funkce f má derivaci na otevřeném intervalu I .

- Je-li $f'(x) > 0$ na intervalu I , je funkce f rostoucí na I .
- Je-li $f'(x) < 0$ na intervalu I , je funkce f klesající na I .

Definice (stacionární bod). Řekneme, že bod x_0 je *stacionárním bodem* funkce f , jestliže funkce f má v bodě x_0 nulovou derivaci, tj. $f'(x_0) = 0$.

Poznámka 2 (geometrický význam). Geometricky jsou stacionární body body, ve kterých má graf funkce vodorovnou tečnu (proč?).

Věta 3 (souvinnost derivace a lokálních extrémů). Necht' má funkce v bodě x_0 lokální extrém. Pak funkce f v bodě x_0 buď nemá derivaci, nebo je tato derivace nulová, tj. platí $f'(x_0) = 0$ a x_0 je stacionárním bodem funkce f .

Věta 2 (souvinnost derivace a monotonie). Necht' funkce f má derivaci na otevřeném intervalu I .

- Je-li $f'(x) > 0$ na intervalu I , je funkce f rostoucí na I .
- Je-li $f'(x) < 0$ na intervalu I , je funkce f klesající na I .

Definice (stacionární bod). Řekneme, že bod x_0 je *stacionárním bodem* funkce f , jestliže funkce f má v bodě x_0 nulovou derivaci, tj. $f'(x_0) = 0$.

Poznámka 2 (geometrický význam). Geometricky jsou stacionární body body, ve kterých má graf funkce vodorovnou tečnu (proč?).

Věta 3 (souvinnost derivace a lokálních extrémů). Necht' má funkce v bodě x_0 lokální extrém. Pak funkce f v bodě x_0 buď nemá derivaci, nebo je tato derivace nulová, tj. platí $f'(x_0) = 0$ a x_0 je stacionárním bodem funkce f .

Definice (konvexnost, konkávnost). Buď f funkce mající derivaci v bodě x_0 . Řekneme, že funkce f je v bodě x_0 **konvexní (konkávni)**, jestliže existuje ryzí okolí bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in \overline{O}(x_0)$ leží body grafu funkce nad tečnou (pod tečnou) ke grafu funkce f sestrojenou v bodě x_0 , tj. platí

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \left(f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \right). \quad (1)$$

Řekneme, že funkce je **konvexní (konkávni) na otevřeném intervalu I** , má-li tuto vlastnost v každém bodě intervalu I .

Definice (inflexní bod). Bod ve kterém se mění charakter funkce z konvexní na konkávni nebo naopak nazýváme **inflexním bodem** funkce f .

Věta 4 (souvislost druhé derivace s konvexností a konkávností). Buď f funkce mající druhou derivaci na otevřeném intervalu I .

- Je-li $f''(x) > 0$ na intervalu I , je funkce f konvexní na I .
- Je-li $f''(x) < 0$ na intervalu I , je funkce f konkávní na I .

Definice (kritický bod). Bod, ve kterém má funkce f nulovou druhou derivaci nazýváme *kritickým bodem* funkce f .

Věta 5 (souvislost inflexních bodů a druhé derivace). Nechť má funkce v bodě x_0 inflexní bod. Pak funkce f v bodě x_0 buď nemá druhou derivaci, nebo je tato druhá derivace nulová, tj. platí $f''(x_0) = 0$ a x_0 je kritickým bodem funkce f .

Věta 6 (souvislost druhé derivace s lokálními extrémy). Buď f funkce a x_0 stacionární bod funkce f . Je-li $f''(x_0) > 0$, nabývá funkce v bodě x_0 lokálního minima, je-li $f''(x_0) < 0$, nabývá funkce v bodě x_0 lokálního maxima.

Věta 4 (souvislost druhé derivace s konvexností a konkávností). Buď f funkce mající druhou derivaci na otevřeném intervalu I .

- Je-li $f''(x) > 0$ na intervalu I , je funkce f konvexní na I .
- Je-li $f''(x) < 0$ na intervalu I , je funkce f konkávní na I .

Definice (kritický bod). Bod, ve kterém má funkce f nulovou druhou derivaci nazýváme *kritickým bodem* funkce f .

Věta 5 (souvislost inflexních bodů a druhé derivace). Nechť má funkce v bodě x_0 inflexní bod. Pak funkce f v bodě x_0 buď nemá druhou derivaci, nebo je tato druhá derivace nulová, tj. platí $f''(x_0) = 0$ a x_0 je kritickým bodem funkce f .

Věta 6 (souvislost druhé derivace s lokálními extrémy). Buď f funkce a x_0 stacionární bod funkce f . Je-li $f''(x_0) > 0$, nabývá funkce v bodě x_0 lokálního minima, je-li $f''(x_0) < 0$, nabývá funkce v bodě x_0 lokálního maxima.

Věta 4 (souvislost druhé derivace s konvexností a konkávností). Buď f funkce mající druhou derivaci na otevřeném intervalu I .

- Je-li $f''(x) > 0$ na intervalu I , je funkce f konvexní na I .
- Je-li $f''(x) < 0$ na intervalu I , je funkce f konkávní na I .

Definice (kritický bod). Bod, ve kterém má funkce f nulovou druhou derivaci nazýváme *kritickým bodem* funkce f .

Věta 5 (souvislost inflexních bodů a druhé derivace). Nechť má funkce v bodě x_0 inflexní bod. Pak funkce f v bodě x_0 buď nemá druhou derivaci, nebo je tato druhá derivace nulová, tj. platí $f''(x_0) = 0$ a x_0 je kritickým bodem funkce f .

Věta 6 (souvislost druhé derivace s lokálními extrémami). Buď f funkce a x_0 stacionární bod funkce f . Je-li $f''(x_0) > 0$, nabývá funkce v bodě x_0 lokálního minima, je-li $f''(x_0) < 0$, nabývá funkce v bodě x_0 lokálního maxima.

Věta 4 (souvislost druhé derivace s konvexností a konkávností). Buď f funkce mající druhou derivaci na otevřeném intervalu I .

- Je-li $f''(x) > 0$ na intervalu I , je funkce f konvexní na I .
- Je-li $f''(x) < 0$ na intervalu I , je funkce f konkávní na I .

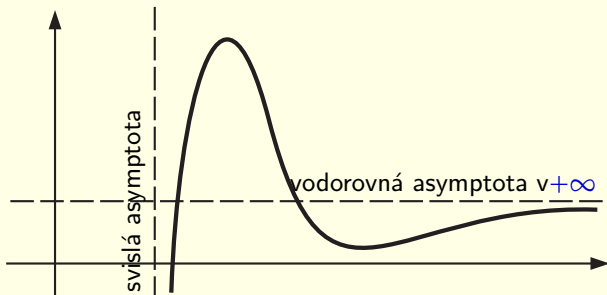
Definice (kritický bod). Bod, ve kterém má funkce f nulovou druhou derivaci nazýváme *kritickým bodem* funkce f .

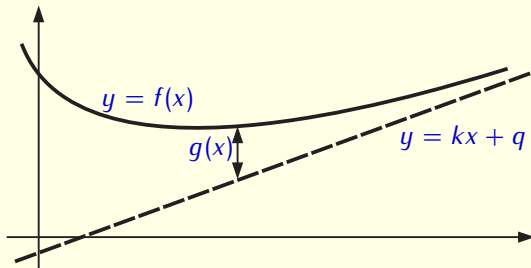
Věta 5 (souvislost inflexních bodů a druhé derivace). Nechť má funkce v bodě x_0 inflexní bod. Pak funkce f v bodě x_0 buď nemá druhou derivaci, nebo je tato druhá derivace nulová, tj. platí $f''(x_0) = 0$ a x_0 je kritickým bodem funkce f .

Věta 6 (souvislost druhé derivace s lokálními extrémy). Buď f funkce a x_0 stacionární bod funkce f . Je-li $f''(x_0) > 0$, nabývá funkce v bodě x_0 lokálního minima, je-li $f''(x_0) < 0$, nabývá funkce v bodě x_0 lokálního maxima.

3 Okolí nevlastních bodů.

Již známe dva druhy asymptot.

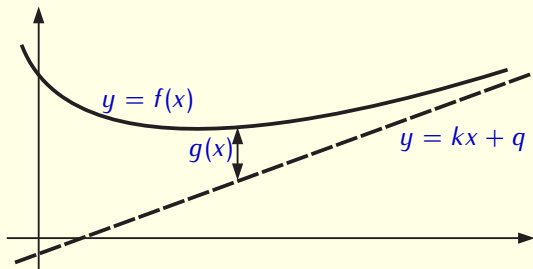




Definice (asymptota se směrnicí). Buď f funkce definovaná v nějakém okolí bodu ∞ . Přímka $y = kx + q$ se nazývá *asymptota se směrnicí ke grafu funkce $y = f(x)$* , jestliže platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |kx + q - f(x)| = 0$$

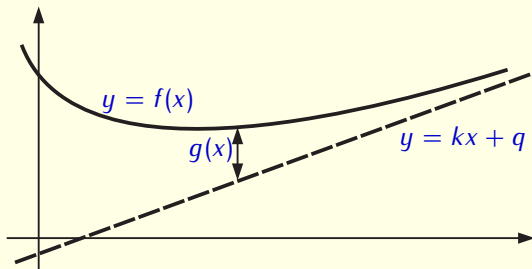
Podobně, zaměníme-li bod ∞ za bod $-\infty$, obdržíme definici asymptoty se směrnicí ke grafu funkce f v bodě $-\infty$.



Definice (asymptota se směrnicí). Buď f funkce definovaná v nějakém okolí bodu ∞ . Přímka $y = kx + q$ se nazývá **asymptota se směrnicí ke grafu funkce $y = f(x)$** , jestliže platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |kx + q - f(x)| = 0$$

Podobně, zaměníme-li bod ∞ za bod $-\infty$, obdržíme definici asymptoty se směrnicí ke grafu funkce f v bodě $-\infty$.



Definice (asymptota se směrnicí). Buď f funkce definovaná v nějakém okolí bodu ∞ . Přímka $y = kx + q$ se nazývá **asymptota se směrnicí ke grafu funkce $y = f(x)$** , jestliže platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |kx + q - f(x)| = 0$$

Podobně, zaměníme-li bod ∞ za bod $-\infty$, obdržíme definici asymptoty se směrnicí ke grafu funkce f v bodě $-\infty$.

Věta 7 (asymptota se směrnici). Buď f funkce definovaná v nějakém okolí bodu ∞ . Přímka $y = kx + q$ je asymptota se směrnicí ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $+\infty$ právě tehdy, když existují konečné limity

$$k := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

a

$$q := \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx).$$

Podobně, zaměníme-li bod ∞ za bod $-\infty$, obdržíme asymptotu se směrnicí ke grafu funkce f v bodě $-\infty$.

Věta 8 (asymptoty racionální funkce). Asymptoty se směrnicí ke grafu racionální funkce v bodech $\pm\infty$ existují současně a jsou stejné.

Poznámka 3. Polynom stupně alespoň 2 nemá asymptoty.

Věta 7 (asymptota se směrnici). Buď f funkce definovaná v nějakém okolí bodu ∞ . Přímka $y = kx + q$ je asymptota se směrnicí ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $+\infty$ právě tehdy, když existují konečné limity

$$k := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

a

$$q := \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx).$$

Podobně, zaměníme-li bod ∞ za bod $-\infty$, obdržíme asymptotu se směrnicí ke grafu funkce f v bodě $-\infty$.

Věta 8 (asymptoty racionální funkce). Asymptoty se směrnicí ke grafu racionální funkce v bodech $\pm\infty$ existují současně a jsou stejné.

Poznámka 3. Polynom stupně alespoň 2 nemá asymptoty.

4 Sestrojení grafu funkce.

1. Nalezneme **definiční obor funkce**, zjistíme paritu funkce a její průsečíky s osami, intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná.
2. Asymptoty, **chování funkce v okolí bodů nespojitosti**.
3. První derivace, stacionární body, **intervaly růstu a klesání** a lokální extrémy.
4. Druhá derivace, kritické body, intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexní body.
5. Asymptoty a charakteristické body (extrémy a inflexní body) zakreslíme do kartézské soustavy souřadnic a **načrtneme graf**.

4 Sestrojení grafu funkce.

1. Nalezneme **definiční obor funkce**, zjistíme paritu funkce a její průsečíky s osami, intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná.
2. Asymptoty, **chování funkce v okolí bodů nespojitosti**.
3. První derivace, stacionární body, **intervaly růstu a klesání** a lokální extrémy.
4. Druhá derivace, kritické body, intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexní body.
5. Asymptoty a charakteristické body (extrémy a inflexní body) zakreslíme do kartézské soustavy souřadnic a **načrtneme graf**.

4 Sestrojení grafu funkce.

1. Nalezneme **definiční obor funkce**, zjistíme paritu funkce a její průsečíky s osami, intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná.
2. Asymptoty, **chování funkce v okolí bodů nespojitosti**.
3. První derivace, stacionární body, **intervaly růstu a klesání** a lokální extrémy.
4. Druhá derivace, kritické body, intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexní body.
5. Asymptoty a charakteristické body (extrémy a inflexní body) zakreslíme do kartézské soustavy souřadnic a **načrtneme graf**.

4 Sestrojení grafu funkce.

1. Nalezneme **definiční obor funkce**, zjistíme paritu funkce a její průsečíky s osami, intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná.
2. Asymptoty, **chování funkce v okolí bodů nespojitosti**.
3. První derivace, stacionární body, **intervaly růstu a klesání** a lokální extrémy.
4. Druhá derivace, kritické body, intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexní body.
5. Asymptoty a charakteristické body (extrémy a inflexní body) zakreslíme do kartézské soustavy souřadnic a **načrtneme graf**.

4 Sestrojení grafu funkce.

1. Nalezneme **definiční obor funkce**, zjistíme paritu funkce a její průsečíky s osami, intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná.
2. Asymptoty, **chování funkce v okolí bodů nespojitosti**.
3. První derivace, stacionární body, **intervaly růstu a klesání** a lokální extrémy.
4. Druhá derivace, kritické body, intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexní body.
5. Asymptoty a charakteristické body (extrémy a inflexní body) zakreslíme do kartézské soustavy souřadnic a **načrtneme graf**.

4 Sestrojení grafu funkce.

1. Nalezneme **definiční obor funkce**, zjistíme paritu funkce a její průsečíky s osami, intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná.
2. Asymptoty, **chování funkce v okolí bodů nespojitosti**.
3. První derivace, stacionární body, **intervaly růstu a klesání** a lokální extrémy.
4. Druhá derivace, kritické body, intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexní body.
5. Asymptoty a charakteristické body (extrémy a inflexní body) zakreslíme do kartézské soustavy souřadnic a **načrtneme graf**.