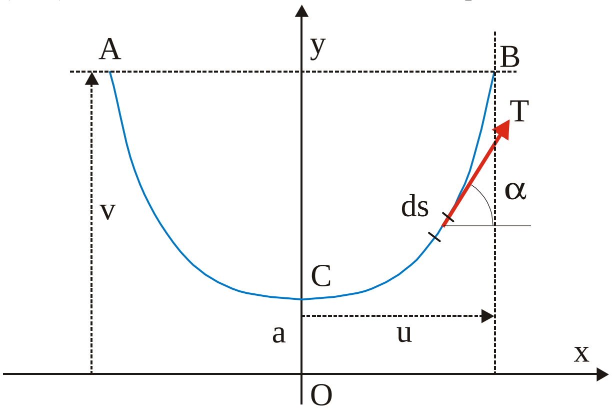
Retour à l'applet

# Chaînette

On considère un fil pesant ou une chaînette à maille fine de longueur 2L et dont la masse par unité de longueur est ρ. Le fil est suspendu entre les points A et B de coordonnées (-u, v) et (u, v). On recherche la forme du fil quand il n'est soumis qu'à son propre poids.




Soit T la tension du fil. La loi fondamentale de la dynamique appliquée à un élément de fil de longueur dl donne :

$$\rho.ds.\vec{g} + d\vec{T} = 0$$

En projetant sur les axes Ox et Oy, on tire :

$$\frac{d}{ds}(T\cos\alpha) = 0 \quad ; \quad -g\rho + \frac{d(T\sin\alpha)}{ds} = 0$$

En intégrant, on a :

Tcosα = H et Tsinα = ρgs + K

$$\text{Soit : } tg\alpha = \frac{\rho gs + K}{H}$$

$$s = \frac{Htg\alpha - K}{\rho g} \quad \Rightarrow \quad ds = \frac{Hd\alpha}{\rho g\cos^2\alpha}$$

mais : dx = ds.cosα ; dy = ds.sinα

$$x = \int \cos\alpha.ds = \frac{H}{\rho g}\int \frac{d\alpha}{\cos\alpha} \quad ; \quad y = \int \sin\alpha.ds = \frac{H}{\rho g}\int \frac{\sin\alpha.d\alpha}{\cos\alpha}$$

**On pose a = H/ρg.**

$$x = a.\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\right| + x_0 \quad ; \quad y = \frac{a}{\cos\alpha} + y_0$$

$$\exp\left(\frac{x - x_0}{a}\right) = tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + tg(\alpha/2)}{1 - tg(\alpha/2)}$$

$$\text{donc : } \exp\left(\frac{x - x_0}{a}\right) + \exp\left(-\frac{x - x_0}{a}\right) = \frac{1 + tg(\alpha/2)}{1 - tg(\alpha/2)} + \frac{1 - tg(\alpha/2)}{1 + tg(\alpha/2)} = \frac{2}{\cos\alpha}$$

$$ch\left(\frac{x - x_0}{a}\right) = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{a}$$

Finalement si les points A et B sont symétriques par rapport à Oy, on a :

$$\boxed{y - y_0 = a.ch\frac{x}{a}}$$

La valeur de a est fonction de la longueur 2L de la chaînette.

$$\text{On a : } ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = ch\frac{x}{a}dx \quad \left(ch^2x - sh^2x = 1\right)$$

$$\text{On intègre ds entre C et B, il vient (AB = 2 u) : } L = \int_0^u ch\frac{x}{a}dx = a.sh\frac{u}{a}$$

Pour résoudre cette équation, on pose z = u/a. Avec ce changement de variable, elle devient :

$$e^z - e^{-z} - 2Lz/u = 0$$

Cette équation transcendante est résolue numériquement et on en déduit a = u/z.

Il est alors possible de construire la chaînette.