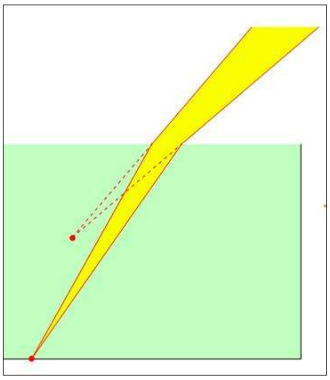
Ryba pod vodou

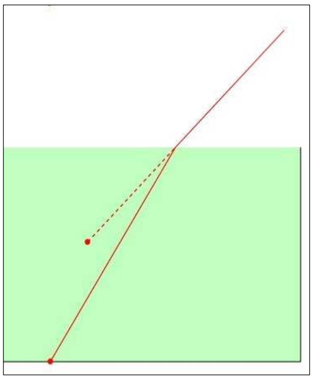
Zadání: Ryba je pod vodou v hloubce ***h***. Kde ji vidí oko pozorovatele?
Cíl:

1) Najít polohu ryby v **obecném případě**, kdy máme **šikmý svazek paprsků nenulové tloušťky** (viz obr. 1).
2) Najít polohu ryby ve **zjednodušeném případě**, kdy máme **šikmý, nekonečně úzký svazek paprsků (nekonečně malé oko)**. Pracujeme potom vlastně jen s **jedním paprskem** (viz obr.2).
3) Najít polohu ryby ve **speciálním případě**, kdy se dívám **kolmo k hladině.**
   a. Řešíme pro **obecný případ 1)** (viz obr.3)
   b. Řešíme pro **zjednodušený případ 2)** (viz obr.4)
4) **Závěr** a úvaha, zda a za jakých podmínek je možné řešit úlohu tak, jak to dělá Kružík ve své sbírce, kdy předpokládá, že **obraz vzniká na svislici nad předmětem**. Takové řešení je vlastně ještě **dalším zjednodušením případu 2)**.

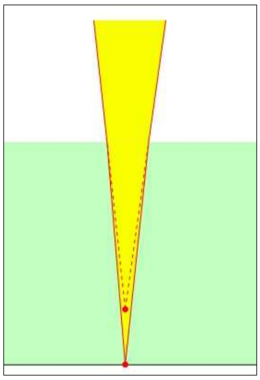
obr. 1



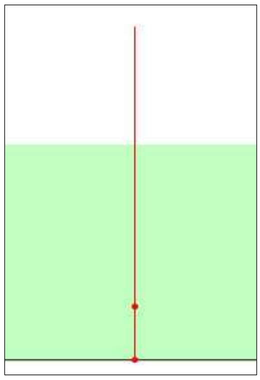
obr. 2



obr. 3



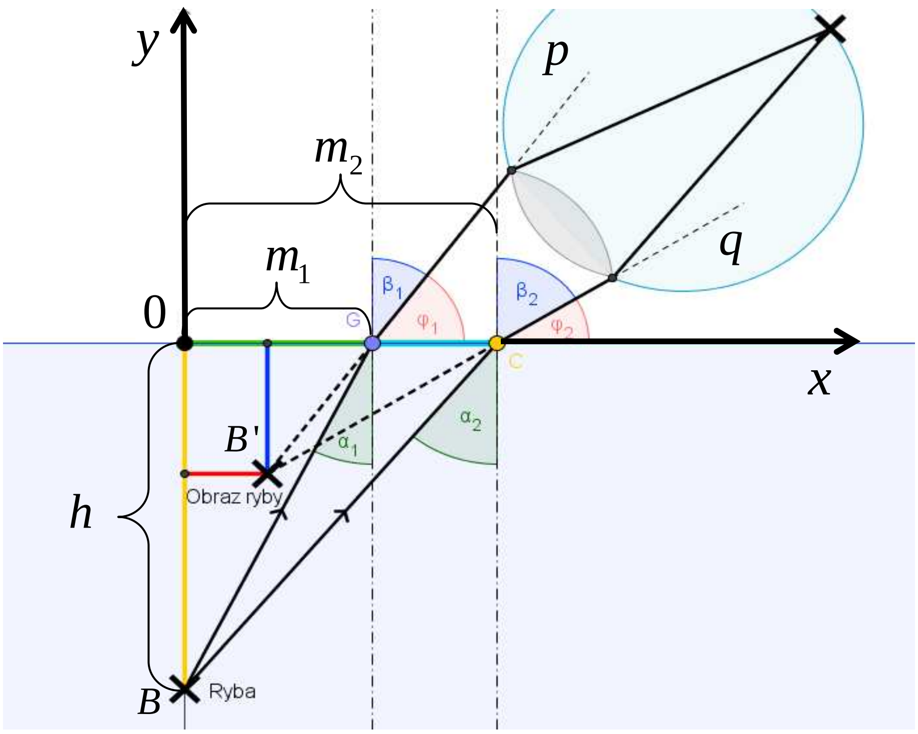
obr. 4



1) OBECNÝ PŘÍPAD - šikmý svazek paprsků nenulové tloušťky

Zavedeme souřadnou soustavu (viz obr. 5) a hledáme souřadnice $(x_{B'}, y_{B'})$ bodu $\boldsymbol{B'}$ (obraz ryby) jakožto průsečíku přímek $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$. Chceme, aby vstupní proměnné byly $\boldsymbol{h, m_1, m_2, n}$.

obr. 5



Z analytické geometrie plyne, že rovnice přímek p a q jsou

$$p : y = (x - m_1) \cdot \tan \varphi_1$$
$$q : y = (x - m_2) \cdot \tan \varphi_2$$

Přitom:

$$\tan \varphi_1 = \frac{1}{tg\beta_1}; \ \tan \varphi_2 = \frac{1}{tg\beta_2}.$$

Takže dostáváme rovnice přímek:

$$\boxed{p : y = \frac{(x - m_1)}{\tan \beta_1} \qquad q : y = \frac{(x - m_2)}{\tan \beta_2}} \qquad (1.1)$$

Nyní potřebujeme vyjádřit $\tan\beta_1$ a $\tan\beta_2$ pomocí ***m,n,h***:

$$\left[\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} \quad \wedge \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{n} \quad \text{(Snellův zákon)} \Rightarrow \sin\beta = n\sin\alpha\right] \Rightarrow \tan\beta = \frac{n\sin\alpha}{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}}$$

Z obrázku 5 vidím, že $\tan\alpha = \frac{m}{h}$, stačí tedy $\sin\alpha$ vyjádřit pomocí $\tan\alpha$ a dosadit do předchozího vzorce:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \cos\alpha\cdot\tan\alpha \\
\sin\alpha &= \sqrt{1-\sin^2\alpha}\cdot\tan\alpha \\
\sin^2\alpha &= (1-\sin^2\alpha)\cdot\tan\alpha \\
\sin\alpha &= \pm\sqrt{\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}} \\
\sin\alpha &= +\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \qquad (\alpha\in\langle 0,90°\rangle)
\end{aligned}
\longrightarrow
\begin{aligned}
\tan\beta &= \frac{n\cdot\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}}{\sqrt{1-n^2\cdot\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}}} \\
&\vdots \\
\tan\beta &= \frac{n\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha(1-n^2)}}
\end{aligned}
\longrightarrow
\begin{aligned}
\tan\beta &= \frac{n\frac{m}{h}}{\sqrt{1+\frac{m^2}{h^2}(1-n^2)}} \\
&\vdots \\
\tan\beta &= \frac{nm}{\sqrt{h^2-m^2(n^2-1)}}
\end{aligned}$$

Dostali jsme tedy:

$$\boxed{\begin{aligned}
\tan\beta_1 &= \frac{nm_1}{A_1}; \quad A_1 = \sqrt{h^2-m_1^{\,2}(n^2-1)} \\
\tan\beta_2 &= \frac{nm_2}{A_2}; \quad A_2 = \sqrt{h^2-m_2^{\,2}(n^2-1)}
\end{aligned}} \tag{1.2}$$

Nyní vyjádříme průsečík přímek ***p*** a ***q***:

Z rovnic (1.1) dostáváme $\frac{(x-m_1)}{\tan\beta_1} = \frac{(x-m_2)}{\tan\beta_2}$ a odtud po několika úpravách máme souřadnice průsečíku:

$$\boxed{\begin{aligned}
x_{B'} &= \frac{m_1\tan\beta_2 - m_2\tan\beta_1}{\tan\beta_2-\tan\beta_1} \\
y_{B'} &= \frac{m_1-m_2}{\tan\beta_2-\tan\beta_1}
\end{aligned}} \tag{1.3}$$

Teď dosadíme (1.2) do: (1.3)

$$x_{B'} = \frac{m_1\tan\beta_2 - m_2\tan\beta_1}{\tan\beta_2-\tan\beta_1} = \frac{\frac{m_1m_2n}{A_2}-\frac{m_1m_2n}{A_1}}{\frac{m_2n}{A_2}-\frac{m_1n}{A_1}} = m_1m_2n\frac{A_1-A_2}{A_1A_2}\cdot\frac{A_1A_2}{(A_1m_2-A_2m_1)n} = \frac{m_1m_2(A_1-A_2)}{A_1m_2-A_2m_1}$$

Ve jmenovateli máme rozdíl odmocnin – rozšíříme součtem:

$$x_{B'} = \frac{m_1m_2(A_1-A_2)}{A_1m_2-A_2m_1}\cdot\frac{A_1m_2+A_2m_1}{A_1m_2+A_2m_1} = m_1m_2\frac{A_1^2m_2+A_1A_2(m_1-m_2)-A_2^2m_1}{A_1^2m_2^2-A_2^2m_1^2}$$

Teď částečně dosadíme za A_1 a A_2 z (1.3):

$$x_{B'} = m_1m_2\frac{\left[h^2-m_1^{\,2}(n^2-1)\right]m_2 + A_1A_2(m_1-m_2) - \left[h^2-m_2^{\,2}(n^2-1)\right]m_1}{\left[h^2-m_1^{\,2}(n^2-1)\right]m_2^2 - \left[h^2-m_2^{\,2}(n^2-1)\right]m_1^2}$$

Nyní stačí roznásobit závorky a po pár úpravách máme výsledek:

$$x_{B'}=\frac{m_1m_2}{h^2(m_1+m_2)}\cdot\left[h^2+(n^2-1)m_1m_2-A_1A_2\right]$$
$$A_1=\sqrt{h^2-m_1^{\,2}(n^2-1)}\qquad A_2=\sqrt{h^2-m_2^{\,2}(n^2-1)} \tag{1.4}$$

Podobným způsobem dostaneme pro y-ovou souřadnici:

$$y_{B'}=-\frac{A_1A_2}{n}\cdot\frac{(A_1m_2+A_2m_1)}{(m_1+m_2)h^2}$$
$$A_1=\sqrt{h^2-m_1^{\,2}(n^2-1)}\qquad A_2=\sqrt{h^2-m_2^{\,2}(n^2-1)} \tag{1.5}$$

2) **ZJEDNODUŠENÝ PŘÍPAD -** šikmý, nekonečně úzký svazek paprsků

Stačí vzít vzorce odvozené pro obecný případ a určit jejich limitu pro $m_1\to m_2=m$. Dosadíme tedy za m_1 i m_2 proměnnou *m*:

$$x_{B'}=\frac{m^2}{h^2 2m}\cdot\left[h^2+(n^2-1)m^2-\left(h^2-m^2(n^2-1)\right)\right]=\ldots=\frac{m^3(n^2-1)}{h^2}$$

$$y_{B'}=-\frac{A^2}{n}\cdot\frac{2Am}{2mh^2}=-\frac{A^3}{nh^2}=-\frac{\sqrt{\left[h^2-m^2(n^2-1)\right]^3}}{nh^2}$$

$$\boxed{x_{B'}=\frac{m^3(n^2-1)}{h^2}\qquad y_{B'}=-\frac{A^3}{nh^2}=-\frac{\sqrt{\left[h^2-m^2(n^2-1)\right]^3}}{nh^2}\qquad A=\sqrt{h^2-m^2(n^2-1)}} \tag{1.6}$$

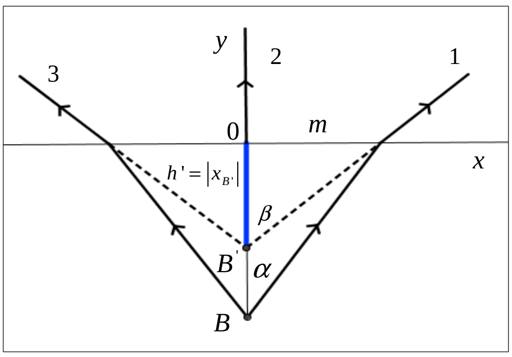
Poznámka: Vztah pro y-ovou souřadici se dá vyjádřit také pomocí úhlů *α* a *β*:

$$\left(y_{B'}=-\frac{A^3}{nh^2}\ \wedge\ \tan\beta=\frac{mn}{A}\ \wedge\ \tan\alpha=\frac{m}{h}\ \wedge\ \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{1}{n}\right)\longrightarrow\ \boxed{y_{B'}=-h\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}\cdot\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}} \tag{1.7}$$

3) **SPECIÁLNÍ PŘÍPAD –** pohled kolmo k hladině

a. Řešení pro OBECNÝ PŘÍPAD (kolmý svazek paprsků nenulové tloušťky):
Stačí vzít vzhledem k symetrii místo paprsků 1 a 3 paprsky 1 a 2. Máme tedy $m_1=0,\ m_2=m,\ A_1=h,\ A_2=A$ a dosazujeme do vzorců (1.4) a (1.5).

Dostáváme $x_{B'}=0;\ y_{B'}=-\frac{hA}{nh^2}\cdot\frac{hm}{m}=-\frac{A}{n}$



$$\boxed{x_{B'}=0\qquad y_{B'}=-\frac{A}{n}=-\frac{\sqrt{h^2-m^2(n^2-1)}}{n}\qquad A=\sqrt{h^2-m^2(n^2-1)}} \tag{1.8}$$

Ke stejnému výsledku musíme dospět i z obrázku:

$$\tan\beta=\frac{m}{h'}\wedge\tan\beta=\frac{nm}{A}\to\frac{m}{h'}=\frac{nm}{A}\to h'=\frac{A}{n}\to y_{B'}=-\frac{A}{n}$$

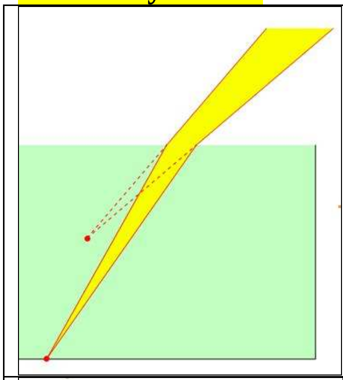
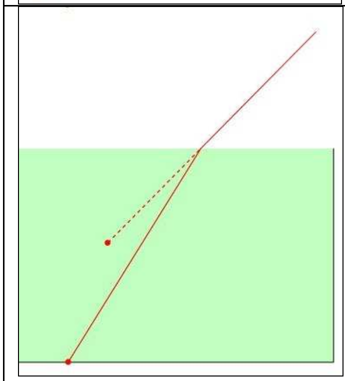
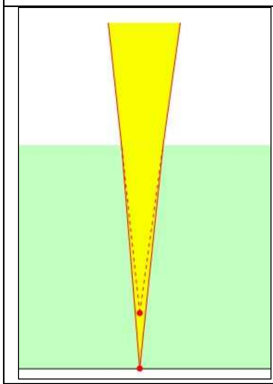
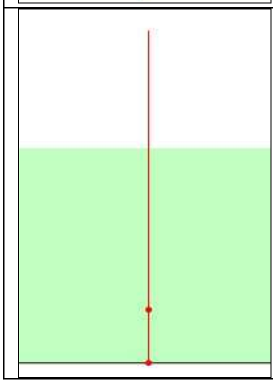
Poznámka – pokud bychom pracovali jen s úhly *α* a *β*, dostáváme také $\boxed{y_{B'}=-h'=-h\cdot\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}}$. (1.9)

b. Řešení pro ZJEDNODUŠENÝ PŘÍPAD: (kolmý svazek paprsků nulové tloušťky):

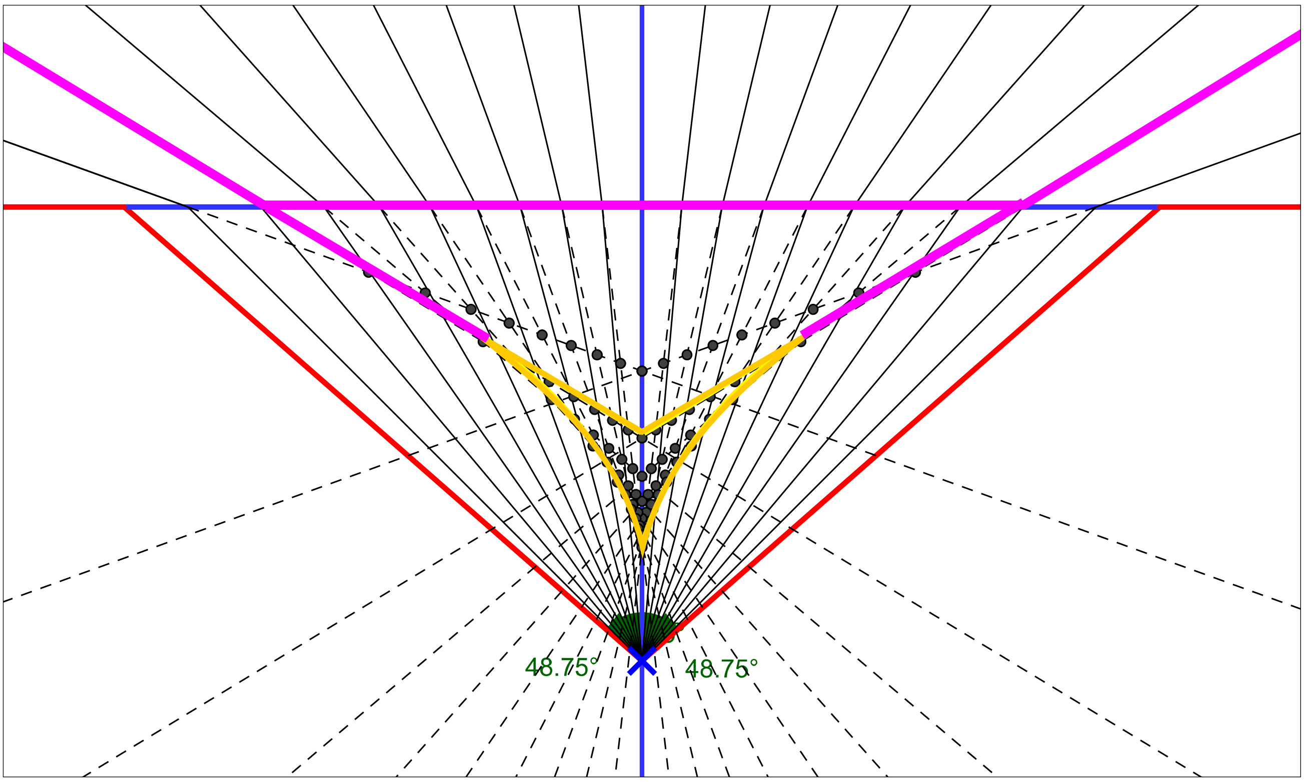
Stačí do vzorce (1.6) dosadit $m=0$: $x_{B'}=0;\ y_{B'}=-\dfrac{\sqrt{\left[h^2\right]^3}}{nh^2}=-\dfrac{h}{n}$. Druhá možnost je dosadit $m=0$ do vzorce (1.8) a dostáváme totéž.

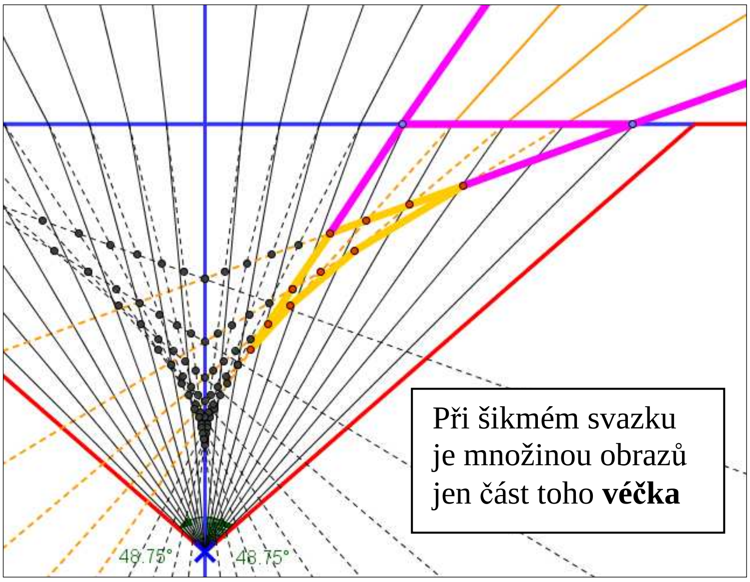
$$\boxed{\begin{aligned} x_{B'} &= 0 \\ y_{B'} &= -\frac{h}{n} \end{aligned}} \qquad (1.10)$$

Shrnutí výsledků:

	**1) OBECNÝ PŘÍPAD -** šikmý svazek paprsků nenulové tloušťky	$x_{B'}=\dfrac{m_1m_2}{h^2(m_1+m_2)}\cdot\left[h^2+(n^2-1)m_1m_2-A_1A_2\right]$ $y_{B'}=-\dfrac{A_1A_2}{n}\cdot\dfrac{(A_1m_2+A_2m_1)}{(m_1+m_2)h^2}$ $A_1=\sqrt{h^2-m_1^2(n^2-1)}$ $A_2=\sqrt{h^2-m_2^2(n^2-1)}$	(1.4) (1.5)
	**2) ZJEDNODUŠENÝ PŘÍPAD -** šikmý, nekonečně úzký svazek paprsků	$x_{B'}=\dfrac{m^3(n^2-1)}{h^2}$ $y_{B'}=-\dfrac{A^3}{nh^2}=-\dfrac{\sqrt{\left[h^2-m^2(n^2-1)\right]^3}}{nh^2}$ $A=\sqrt{h^2-m^2(n^2-1)}$ $y_{B'}=-h\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}\cdot\dfrac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}$	(1.6) (1.7)
	**3) SPECIÁLNÍ PŘÍPAD –** pohled kolmo k hladině **Nenulový svazek**	$x_{B'}=0$ $y_{B'}=-\dfrac{A}{n}=-\dfrac{\sqrt{h^2-m^2(n^2-1)}}{n}$ $A=\sqrt{h^2-m^2(n^2-1)}$ $y_{B'}=-h'=-h\cdot\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}$	(1.8) (1.9)
	**4) SPECIÁLNÍ PŘÍPAD –** pohled kolmo k hladině **Nulový svazek**	$x_{B'}=0$ $y_{B'}=-\dfrac{h}{n}$	(1.10)

4) ZÁVĚR – a úvaha o řešení v Křižíkovi





Podle velikosti oka se na zobrazení podílí větší či menší počet paprsků a jsou to nejen paprsky krajní, ale i všechny mezi nimi, včetně toho limitního jednobodového svazku uprostřed. Obrazem bodu není tedy bod, ale jak vidíme z obrázku takové **véčko**. Centrálnímu bodu **dole** odpovídá limita jednobodového svazku, **vrchnímu** centrálnímu bodu odpovídá obraz tvořený krajními body svazku. Odpověď na otázku, kde vzniká obraz, není jednoznačná, mohli bychom aspoň udat tyto dvě hodnoty.

Ke Křižíkovu řešení: Kružík hledá řešení případu (2) (viz shrnutí výsledků), ale protože předpokládá neoprávněně, že obraz vzniká svisle nad vzorem, dostává místo správného výsledku $\boxed{y_{B'} = -h\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}\cdot\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}}$ výsledek $\boxed{y_{B'} = -h' = -h\cdot\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}}$, což je ale řešení, které odpovídá nenulovému svazku při pohledu kolmo k hladině.